2024春省身班动态进出考试数学分析III

一、 $\alpha > 0$, 计算积分:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-x}}{x}\right)^2 dx$$

二、 计算极限:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{e^{\frac{x}{n}} + (1+\frac{x}{n})^n} dx$$

三、 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $a_n > 0$, 且有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \le 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} + \frac{1}{n^2}$$

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性.

四、 求 $f(x) = \arcsin(\cos x)$ 的傅里叶级数 $(-\pi \le x \le \pi)$, 并计算:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

五、 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 R 而和函数为 $S(x)$. 任意取定 $x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$, 令 $R' = \min\{x_0 + R - x_1, x_1 + R - x_0\}$. 求证: $S(x)$ 在 x_1 处的Taylor级数在 $(x_1 - R', x_1 + R')$ 中绝对收敛且收敛到 $S(x)$.

六、 设 D 为 $\mathbb{R}^2$ 中的边界光滑的有界单连通区域, $u \in C^2(D)$, 且满足

$$\triangle u = 0$$

其中 $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

$$u + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 证明:

$$u \equiv 0, \forall (x,y) \in D$$