数学大类2024-2025学年第一学期抽象代数期中考试

出题人：王秀玲

回忆人： jpp

一、(本题10分)请举例

(1)无限群, 除幺元外都是无限阶元

(2)无限群, 除幺元外既有有限阶元也有无限阶元

二、(本题10分) G是一个阶大于2的群, 且G中元素x都满足$x^2=e$, 求证：G有4阶子群

三、(本题10分) 求证：是否存在12阶群没有6阶子群

四、(本题10分) 群G有两个2阶元ab, 且ab是$2k+1$阶元, 求证：存在$g\in G$, 使得$b=gag^{-1}$

五、(本题10分) 设群G上的变换$\varphi: x\to x^{-1}$, 求证：φ 是自同构当且仅当G是交换群

六、(本题10分)

设G是群, $a\in G, N=<a>$, 若$N\lhd G$

求证：N的任意子群都是G的正规子群

七、(本题20分)

设集合G是由 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}\\ \sqrt{-1} & 0\end{pmatrix}$ 生成的，

(1)求证：G对矩阵乘法构成8阶群

(2)问群G与$\mathbb{Z}_8$是否同构, 说明理由

八、(本题15分)

(1)设$K=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$, 求证：$K\lhd S_4$

(2)问商群S_4/K是否与S_3同构,说明理由

九、(本题5分)

求证:$S_n(n\geq 5)$的非平凡正规子群只有A_n