数学大类2024-2025学年第一学期数学分析3期中考试

授课老师：lja

回忆人： jpp

一、(本题15分)求常数t使得

$$\frac{2xy^2dx-(ty+tx^2y)dy}{(1+x^2)^2}$$

是某个函数$u(x,y)$的全微分, 并求出$u(x,y)$.

二、(本题20分)设L为$\mathbb{R}^2$中简单光滑闭曲线, $\vec{n}$为L所围区域D的外法向量, $A=(\xi,\eta)$为曲线外一点, 设r为积分变点$X=(x,y)$到A的距离, 即$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, 记$\vec{r}=(x-\xi,y-\eta)$, $(\vec{n},\vec{r})$表示$\vec{n}$与$\vec{r}$的夹角, 求

$$\int\limits_L \frac{\cos(\vec{n},\vec{r})}{r}ds$$

三、(本题15分)求

$$\iint\limits_S \frac{3xy^2dydz+3x^2ydzdx+z^3dxdy}{x^2+y^2+z^2}$$

其中S为曲面$x^2+y^2+z^2=9$的外侧.

四、(本题20分)设数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2}$, 且$\cos a_n-a_n=\cos b_n$, 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛,求证：

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛　　(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{b_n^3}$收敛

五、判断下列无穷级数或无穷乘积的敛散性，指明绝对收敛、条件收敛、发散.
(共15分，每小题5分)

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^3}\frac{\cos 2n}{n}$

(2)$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

(3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{(x+\ln(1+\frac{1}{1}))(2x+\ln(1+\frac{1}{2}))\ldots(nx+\ln(1+\frac{1}{n}))}(x>0)$

六、判断下列广义积分的敛散性，指明绝对收敛、条件收敛、发散.(共15分，每小题5分)

(1)$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}(x^{\beta}+1)}dx$　　(2)$\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$　　(3)$\int_2^{\infty}\frac{\sin\ln x}{x\ln x}dx$