2023-2024 年数学科学系风险理论期末考试回忆

任课教师：韩霞

注：回忆 6.11 距考试结束已近一个月，采取结合复习题回忆的方式且很有可能会有疏漏，请谅解。

附件：复习题（见后文，老师在考前提供了第 55 题的答案，见试题回忆部分）

试题回忆：

一.与复合泊松过程相关的问题，大致内容为，第一问是复习题第 12 题，第二问是复习题第 10 题（但是只要求用矩母函数这一种方法）

二.破产概率相关的问题，第一问定义默写（什么是调节系数？破产概率？）第二问是复习题第 15 题，第三问是复习题 22 题破产概率表达式的默写，以及求出 X 服从指数分布时，破产概率条件期望的具体形式

三.关于一致风险度量的讨论，具体内容有默写一致风险度量的定义、举例说明VaR不是一致风险度量和证明ES是一致风险度量。可以参考复习题 27、28、30 等。

四.本题改编自复习题 46，没有直接告诉你Y_{max},需要你自己写出来并证明，并且本题还问了Y_{min},复习题不涵盖，但上课板书了。

五.本题是复习题 55 题，老师考前说：“有同学问这个题，于是我写了一份答案”。

证明. 设 $S_X(x)$ 为 X 的生存函数, 当 $\alpha \geq S_X(0)$ 时, $\mathrm{VaR}_\alpha(T(X,d) = \delta(d)$, 因此 $d^* = \infty$, 且 $\min\limits_{d>0}\{\mathrm{VaR}_\alpha(T(d,X)\} = \mathrm{VaR}_\alpha(X) = 0$.

viii

下面令 $0 < \alpha < S_X(0)$. 由于

$$\mathrm{VaR}_\alpha(T(X,d)) = \begin{cases} d + \delta(d), & 0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha), \\ S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d), & d > S_X^{-1}(\alpha). \end{cases}$$

$\mathrm{VaR}_\alpha(T(X,d))$ 在 $d \in (0,\infty)$ 上是连续的，并且在 $d \in (S_X^{-1}(\alpha),\infty)$ 上是递减的，且随着 $d \to \infty$ 的极限为 $S_X^{-1}(\alpha)$.

当 $\rho^* = \dfrac{1}{1+\rho} < S_X(0)$ 时，函数 $d + \delta(d)$ 在 $d \in (0, d_0)$ 上是递减的，在 $d \in (d_0, \infty)$ 上是递增的，其中 $d_0 = S_X^{-1}(\rho^*) > 0$，因此函数 $d + \delta(d)$ 在 d_0 处取得最小值，最小值为 $d_0 + \delta(d_0)$. 因此，如果

$$\alpha < \rho^* < S_X(0), \quad S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)$$

都成立，则 $0 < d_0 < S_X^{-1}(\alpha)$，并且最小值 $d_0 + \delta(d_0)$ 也是 $d \in (0,\infty)$ 上 $\mathrm{VaR}_\alpha(T(X,d))$ 的全局最小值. 因此，$d^* = S_X^{-1}(\rho^*) > 0$.

若上述条件不成立：特别的，当 $\alpha \geq \rho^*$ 时，则 $d_0 \geq S_X^{-1}(\alpha)$，且 $\mathrm{VaR}_\alpha(T(X,d))$ 在 $d \in (0,\infty)$ 上是递减的，随着 $d \to \infty$ 的极限值为 $S_X^{-1}(\alpha)$，因此 $d^* = \infty$;

若 $\rho^* \geq S_X(0)$，则 $d_0 = 0$，$\mathrm{VaR}_\alpha(T(X,d))$ 在 $d \in (0, S_X^-(\alpha))$ 上是递增的, 因此若 $(1+\rho)E(X) < S_X^-(\alpha)$, 则 $d^* = 0$, 否则 $d^* = \infty$;

综上所述，当 $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ 且 $S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)$ 时，最优自留额为 $d^* = S_X^{-1}(\rho^*)$,

$$\min_{d>0}\{\mathrm{VaR}_\alpha(T(d,X)\} = d_0 + \delta(d_0);$$

否则

$$\min_{d>0}\{\mathrm{VaR}_\alpha(T(d,X)\} = \mathrm{VaR}_\alpha(X) \wedge (1+\rho)E(X).$$

六.(10 分，唯一一个不在教材、复习题或板书中的问题)
随机变量 X 的尾事件是指事件$A \in \mathcal{F}$,其满足$0 < P(A) < 1$且对所有$\omega \in A, \omega' \in A^c$有$X(\omega) \geq X(\omega')a.s.$,对于随机向量$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的各个分量共享一个概率为$1-p$的尾事件，则称其为 p-风险聚集的。证明若存在$(X_1, \dots, X_n)$的 copula 函数 C 满足$C(p, \dots, p) = p$,则$(X_1, \dots, X_p)$是 p-风险聚集的.

这个题主要是读懂题目意思后还需要对连接函数定义比较熟悉。从二维情况能看明白这个题目说什么（证明“二四象限”的概率测度为 0）一个参考思路如下，可能有疏漏：

设 $A = \overset{(**)}{\left(\bigcap_{m=1}^{n}\{U_m \le p\}\right)^c} = \bigcup_{m=1}^{n}\{U_m > p\}$ (*)

因为 $P(U_i \le p) = P(U_1 \le p, \dots, U_n \le p)$

所以 $P(B_i) = P(\bigcap_{m=1}^{n} B_m)$ 又 $B_i \supseteq \bigcap_{m=1}^{n} B_i$

故有 $P(B_i - \bigcap_{m=1}^{n} B_m) = P(B_i) - P(\bigcap_{m=1}^{n} B_m) = 0.$ $(\forall i=1,2,\dots,n)$

从而 $\sum_{i=1}^{n} P(B_i - \bigcap_{m=1}^{n} B_m) = 0$

$\ge P\left(\sum_{i=1}^{n}(B_i - \bigcap_{m=1}^{n} B_m)\right)$

$= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i - \bigcup_{i=1}^{n}(\bigcap_{m=1}^{n} B_m)\right)$

$= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i - \bigcap_{m=1}^{n} B_m\right)$

$\Rightarrow P(\bigcup_{m=1}^{n} B_i) = P(\bigcap_{m=1}^{n} B_i)$ 从而 (*) $\overset{a.s.}{=} \bigcap_{m=1}^{n}\{U_m > p\}$

从而任取 $\omega \in A$, $\omega' \in A^c$. 由(**)

$\bigcap_{m=1}^{n}(U_i > p)$ $\bigcap_{m=1}^{n}\{U_m \le p\}$

每分量上都有 $X_i(\omega) \ge X_i(\omega')$

选课建议：
截止选课了才知道这门课是数院研究生的必修课，对本科生开放。目前来看，相对其他一些选修课而言是真正的硬课，我因为水平有限学得比较吃力。期末复习任务不小，但是复习题和上课讲过的知识涵盖了 90 分，考得不偏但足够细。学习体验难度远超江老师的概率论，建议学了随机过程再学，还需要自己补充阅读一些知识。对概率、金融和风险感兴趣的同学建议选，不建议用于“凑学分”。老师亲切友善。给分自己觉得比较正常，但是我没有认识的同学选课所以缺少足够的样本。期末把复习题全部做完，并理解重要概念。

附：期末复习题

风险理论 (基础)

考试地点：数学学院第一报告厅

考试时间：6 月 11 日上午 10:00-11:40

风险是现代金融的一个本质特征．精算学以保险风险为主要的研究对象，利用概率统计的相关理论和方法解决保险经营中的各种风险计量和风险管理问题．风险理论的破产理论和风险度量方法在保险公司偿付能力管理和金融机构风险 (资本) 管理中发挥着越来越重要的作用．

本课程主要授课对象为高年级本科生与研究生，主要包括以下 5 个部分：

- 短期风险模型和长期聚合风险模型
  要求：（1）掌握短期风险模型和长期聚合风险模型的建模方法；（2) 掌握基于简单个体损失分布求总损失量的分布的方法；（3）特别掌握 Poisson 聚合模型、复合 Poisson 过程的性质；

- 盈余过程与破产
  要求：(1) 掌握连续时间与离散时间下盈余过程、破产概率、调节系数的定义；（2) 索赔额为特殊分布下破产概率以及调节系数的求解；（3）布朗运动下盈余过程的破产概率；

- 风险度量及其应用
  要求：（1）掌握 VaR、ES、一致风险度量、凸风险度量、扭曲风险度量的定义和性质；（2）球面以及椭圆分布的定义、性质与应用；（3）连接函数（Copula）和依赖性；

- 风险排序与保费原理设计
  要求：（1）掌握一阶、二阶随机占优的定义、性质以及判定定理；（2）不同分布下的序关系、序关系下的破产概率；（3）常见的保费原理及其相应的性质；

- 效用理论与保险决策
  要求：（1）掌握效用函数的定义、常见的效用函数；（2）效用函数的性质与风险态度；（3）期望效用理论下的最优再保险问题．

参考书籍：

- 吴岚, (2012). 风险理论. 北京大学出版社.

- Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey and Paul Embrechts, (2015). Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press.

- Hans Föllmer, Alexander Shied, (2016). Stochastic Finance: an Introduction in Discrete time. Walter de Gruyter, Berlin.

参考习题:

1. (个体风险模型) 已知示性变量 I 满足 $\mathbb{P}(I=1)=0.05, B$ 服从 0 到 20 的均匀分布 $\mathrm{U}(0,20)$. 计算个体风险变量 $X=IB$ 的分布函数、期望和方差.

2. 已知三个相互独立的随机变量 X_1, X_2, X_3 均服从指数分布, 而且 $\mathrm{E}(X_i)=\lambda$ $(i=1,2,3)$. 试用两种方法计算 $S=X_1+X_2+X_3$ 的分布函数.

3. 设 N_1, N_2, N_3 相互独立, 服从 Poisson 分布, 而且 $\mathbb{E}(N_i)=i^2$ $(i=1,2,3)$. 计算 $S=-2N_1+N_2+3N_3$ 的分布.

4. 设 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 为一组独立同分布的随机变量, 在以下两种情形下确定 $\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$ 的分布.

   (i) $X_1 \sim B(m,q)$;

   (ii) $X_1 \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

5. 给出短期聚合模型的定义，写出聚合模型的均值、方差、矩母函数以及概率母函数关于索赔次数以及索赔量的表达式.

6. 对于聚合模型 $S=\displaystyle\sum_{i=1}^N X_i$, 若 N 服从参数为 p 的几何分布，分析 S 的分布性质. 进一步，若 $X \sim \exp(\lambda)$, 求 S 的分布函数.

7. 证明短期 Poisson 聚合模型的渐进正太性，即 $S \sim CP\left(\lambda, f_X(x)\right)$, 则如下的标准化随机变量 Z 的极限分布为标准正态分布:
$$Z=\frac{S-\lambda \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\lambda \mathrm{E}\left(X^2\right)}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

8. 设 X 为保险公司面临的索赔额且分布函数为 F_X. 在超额赔款再保险协议中, 设自留额为 d, 保险人与再保险人的赔付额分别记为 Y 和 Z.

   (i) 给出 Y,Z 的分布函数并计算 Y, Z 的 n 阶矩.

9. 设 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 是相互独立的随机变量且 $S_i \sim CP\left(\lambda_i, f_i(x)\right)$, 证明
$$S=S_1+S_2+\cdots+S_m \sim CP\left(\lambda, f_X(x)\right),$$
其中
$$\lambda=\sum_{i=1}^m \lambda_i, \quad f_X(x)=\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} f_i(x).$$

10. 设 $S \sim CP\left(\lambda, f_X(x)\right)$, 其中 $f_X(x)$ 为离散型概率函数. 对任意 $0<\alpha<1$, 考虑满足如下分布的 $\tilde{S}: \tilde{S} \sim CP\left(\tilde{\lambda}, \tilde{f}_x(x)\right)$, 其中 $\tilde{\lambda}=\lambda / \alpha$, 索赔量的概率函数为
$$\tilde{f}_X(x)= \begin{cases}a f_X(x), & x>0, \\ 1-\alpha, & x=0.\end{cases}$$
试用以下两种方法证明 S 和 $\widetilde{S}$ 具有相同分布: (1) 比较 S 和 $\tilde{S}$ 的矩母函数; (2) 直接对 S 和 $\widetilde{S}$ 的分布进行比较.

11. 对短期保险险种一般定义损失比为 $R=\dfrac{S}{G}$, 其中 S 为总损失量, G 为总保费. 当 S 满足聚合模型时, G 可以表示为

$$G=(1+\theta)\mathrm{E}(S)=(1+\theta)p_1\mathrm{E}[N],$$

其中 $p_1=\mathbb{E}[X]$. 证明:

$$\mathbb{E}[R]=(1+\theta)^{-1},\quad \operatorname{Var}(R)=\frac{\mathbb{E}[N]\operatorname{Var}(X)+p_1^2\operatorname{Var}(N)}{[(1+\theta)p_1\mathbb{E}[N]]^2}.$$

对 N 服从 Poisson 分布或负二项分布导出 $\operatorname{Var}(R)$ 的具体表达式.

12. 给出复合泊松过程的数学期望、方差、距母函数.

13. 已知连续时间复合 Poisson 盈余过程的索赔量变量 $X\sim\mathrm{Gamma}\,(2,1)$ 或者 $X\sim\exp(\lambda)$, 计算相应的调节系数.

14. 随机过程 $\{U(t),t\geqslant 0\}$ 为连续时间盈余过程：$U(t)=u+ct-S(t),\ t\geqslant 0$. 证明只要收入大于平均损失，当 $t\to\infty$, 盈余过程的极限几乎处处大于零, 即,

$$\Pr\left(\lim_{t\to\infty}U(t)>0\right)=1.$$

15. 给出盈余过程 $U(t)=u+ct-S(t),\ t\geqslant 0$ 的调节方程，并证明调节系数 R 满足如下不等式：

$$\frac{1}{k}\ln(1+\theta)<R\leqslant 2\theta\frac{\mathrm{E}(X)}{\mathrm{E}\left(X^2\right)},$$

其中 θ 为期望保费原理下的安全负荷系数，k 为索赔 X 的上界.

16. 随机过程 $\{U(t),t\geqslant 0\}$ 为连续时间盈余过程: $U(t)=u+ct-S(t),\ t\geqslant 0$, 其中 $u\geqslant 0$, $S(t)\sim CP(\lambda t,f_X(x))$. 在期望保费原理下 (安全负荷系数 $\theta>0$),

   (i) 给出无限时间下破产概率以及首次破产时间的定义;

   (ii) 证明破产概率 $\psi(u)$ 满足如下微分方程

   $$\psi'(u)=\frac{\lambda}{c}\psi(u)-\frac{\lambda}{c}\left\{\int_0^{\mu}\psi(u-x)\mathrm{d}F_X(x)+[1-F_X(u)]\right\},\quad u\geqslant 0,$$

   其中 $X\sim F_X$.

   (iii) 若 X 服从参数为 β 的指数分布时，给出破产概率的清晰表达式.

17. 证明以下关于调节系数 r 的方程存在非平凡正解：

$$M_X(s)=1+(1+\theta)\mathbb{E}[X]r.$$

18. 根据经典盈余过程 $U(t)=u+ct-S(t),\ t\geqslant 0$ 给出用布朗运动近似后的盈余过程；进一步假设保险人购买比例再保险，保费与再保费根据期望保费原理计算，试给出该盈余过程下的调节系数.

19. 随机过程 $\{U(t),t\geqslant 0\}$ 为连续时间盈余过程: $U(t)=u+ct-S(t),\ t\geqslant 0$, 其中 $u\geqslant 0$, $S(t)\sim CP(\lambda t,f_X(x))$. 令 L 为最大总损失过程，即 $L=\sup\limits_{t\geq 0}\{S(t)-ct\}$. 在期望保费原理下 (安全负荷系数 $\theta>0$), 给出破产概率关于 L 分布函数 F_L 的表达并计算 L 的矩母函数.

20. 设保险人每年的理赔额为 W_i，$i=1,2,...$，且 $W_i \sim \mathrm{N}(5,1)$．在期望保费原理下，保险人根据比例再保险协议购买再保险，转移比例为 α，保险人以及再保险人的安全系数分别为 $\theta=0.25$，$\eta=0.4$,。给出该盈余过程下的调节系数 $\tilde{R}$ 关于 α 的函数关系，并计算使调节系数最大情形下的再保险策略 α.

21. 设有复合 Poisson 盈余过程, 考虑针对每个个体损失 X 的再保险合约. 止损再保险方式下, 记再保险函数为 $I_d(X)$, 再保险费为 c_d, 自留风险的调节系数为 R_d. 对任意给定的再保险函数 $h(X)$, 记再保险保费为 c_h, 自留风险的调节系数为 R_h. 若
$$\mathbb{E}[h(X)]=\mathbb{E}\left[I_d(X)\right], \qquad c_h=c_d,$$
则有 $R_h \leq R_d$.

22. 设盈余过程 $\{U(t), t \geqslant 0\}$ 中的总损失过程 $\{S(t), t \geqslant 0\}$ 为复合 Poisson 过程, 则对给定的初始盈余 $u \geqslant 0$, 若已知破产概率 $\psi(u)$ 有如下结论成立:
$$\psi(u)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{Ru}}}{\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{-RU(T)} \mid T<+\infty\right]},$$
其中 R 为调节系数，求 $X \sim \exp(\beta)$ 时破产概率的解析表达式.

23. 令 v 为减函数且 $v(\infty)=0$, $\{S_0=0, S_n=W_1+\cdots+W_n, n \geqslant 1\}$ 是随机变量序列. 若 $v(x)$ 使得 $\{v\left(U_n\right), n \geqslant 0\}$ 成为一个上鞅序列, 则离散盈余过程
$$\left\{U_n=u+cn-S_n, n \geqslant 0\right\},$$
的破产概率满足:
   (i) $\psi(u) \leqslant \dfrac{v(u)}{v(0)}, u \geqslant 0$;
   (ii) $\psi(u) \leqslant \dfrac{v(u)}{\mathrm{E}\left[v\left(U_T\right) \mid T<+\infty\right]}, u \geqslant 0$.

24. 证明函数 $v(x)(x \in \mathbb{R})$ 使得由连续 Poisson 盈余过程
$$U(t)=u+ct-S(t), \quad t \geqslant 0$$
生成的实值过程 $\{v[U(t)], t \geqslant 0\}$ 成为鞅的充分必要条件是
$$cv'(x)+\lambda \int_0^{+\infty} v(x-y) \mathrm{d} F_X(y)-\lambda v(x)=0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

25. 对于连续 Poisson 盈余过程 $\{U(t), t \geqslant 0\}$, 由破产概率函数 $\psi(\cdot)$ 生成的过程 $\{\psi[U(t)], t \geqslant 0\}$ 为鞅且
$$c\psi'(u)+\lambda \int_0^{+\infty} \psi(u-y) \mathrm{d} F_X(y)-\lambda \psi(u)=0, \quad u \geqslant 0.$$

26. 给出 VaR 以及 ES 的定义并计算高斯损失分布的 VaR 以及 ES.

27. 试举例说明分位数风险度量不满足次可加性, 即存在随机变量 X_1,X_2 以及 $\alpha \in (0,1)$ 使得 $\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y) \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)+\mathrm{VaR}_\alpha(Y)$.

28. 若 X,Y 同单调, 证明对任意的 $\alpha \in (0,1)$，$\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y)=\mathrm{VaR}_\alpha(X)+\mathrm{VaR}_\alpha(Y)$.

29. 设 f 为递增左连续函数，证明 $f(F_X^{\leftarrow}(\alpha))=F_{f(X)}^{\leftarrow}(\alpha)$，其中 $X \sim F_X$, $f(X) \sim F_{f(X)}$.

30. 给出一致风险度量的定义并证明 $\mathrm{ES}_\alpha(X)$ 为一致风险度量.

31. 设 $\mathcal{M}=L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$, $p\in[1,\infty)$. 当 $L\in\mathcal{M}$ 时, 证明 $\rho_{[\alpha,p]}(L)=E(L)+\alpha\left\|(L-E(L))_+\right\|_p$ 为一致风险度量, 其中 $\|L\|_p:=E\left(|L|^p\right)^{1/p}<\infty$.

32. 证明对于任意的货币风险度量 ρ,
   (i) ρ 是关于上确界范数 $\|Y\|:=\sup\limits_{\omega\in\Omega}|Y(\omega)|$1-Lipschitz 连续的;
   (ii) ρ 满足凸性当且仅当 ρ 为拟凸的, 即对任意的 $X,Y\in\mathcal{X}$ 和 $\lambda\in(0,1)$, 有 $\rho(\lambda X+(1-\lambda)Y)\le\lambda\rho(X)+(1-\lambda)\rho(Y)\Longleftrightarrow\rho(\lambda X+(1-\lambda)Y)\le\max\{\rho(X),\rho(Y)\}$.

33. 设 ρ 为一个单调的、平移不变的风险度量, 即货币风险度量, 接受集为 $\mathcal{A}_\rho$. 那么
   (i) $\mathcal{A}_\rho$ 是凸集当且仅当 ρ 是凸风险度量;
   (ii) $\mathcal{A}_\rho$ 是凸锥的当且仅当 ρ 是一致性的.

34. 试举一个凸风险度量但不是一致性风险度量的例子.

35. 证明期望分位数风险度量 (expectile) 在 $\alpha\geq 0.5$ 时是一致风险度量.

36. 给出凸扭曲风险度量 (convex distortion risk measure) 的定义, 并证明其满足同单调可加性.

37. (同单调联合分布) 设 $U\sim\mathrm{U}(0,1)$, 定义以下随机向量
$$\left(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n\right)=\left(F_{X_1}^{-1}(U),F_{X_2}^{-1}(U),\cdots,F_{X_n}^{-1}(U)\right).$$
   则该向量的分布函数等于如下所谓的 Fréchet/Höffding 上界:
$$\mathbb{P}\left[Y_1\leqslant y_1,\cdots,Y_n\leqslant y_n\right]=\min_{j=1,\cdots,n}\operatorname{Pr}\left[X_j\leqslant y_j\right].$$

38. (同单调随机向量之和在凸序意义下最大) 设 $X_i\sim F_i$, $(i=1,...,n)$ 以及 $U\sim U(0,1)$, 定义以下随机向量
$$\left(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n\right)=\left(F_{X_1}^{-1}(U),F_{X_2}^{-1}(U),\cdots,F_{X_n}^{-1}(U)\right),$$
   则
$$X_1+X_2+\cdots+X_n\leqslant_{cx}Y_1+Y_2+\cdots+Y_n.$$

39. 设 X 服从 $\{0,1,2,3\}$ 上的均匀分布, $Y\sim B(3,1/2)$, 设 $X\overset{\mathrm{d}}{=}X'$,$Y\overset{\mathrm{d}}{=}Y'$ 且 (X',Y') 为同单调随机向量, 求 (X',Y') 的联合分布函数.

40. 令 $\boldsymbol{u}=(u_1,\ldots,u_d)$, 对每个 copula 函数 $C(\boldsymbol{u})$ 均有下列不等式成立:
$$\max\left(\sum_{i=1}^d u_i+1-d,0\right)\leqslant C(\boldsymbol{u})\leqslant\min\left(u_1,\ldots,u_d\right).$$

41. 设 $\boldsymbol{X}\sim E_d(\boldsymbol{\mu},\Sigma,\psi)$, $\mathcal{M}=\left\{L:L=m+\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{X},m\in\mathbb{R},\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^d\right\}$. 对任意 $\mathcal{M}$ 上的正齐次的、平移不变性的和分布不变的风险度量 ϱ, 若 $\varrho(Y)>0$ 且 $\boldsymbol{X}$ 有一个有限的协方差矩阵, 固定 $\mathbb{E}(L)$, 证明最小化 ρ 的组合权重与最小化方差策略相同.

42. 在随机序的意义下, 二项分布 $B(n,p)$ 关于两个参数 (固定之一) 都是随机递增的.

43. 试构造非退化随机变量 X 依止损序小于 Y, 但不满足随机序小于 Y.

44. 试构造非退化随机变量 X 依凸序小于 Y.

45. 若非负随机变量 X 与 Y 满足: $X \leqslant_{sl} Y$ 和 $\mathrm{E}(X) < \mathrm{E}(Y)$, 则存在随机变量 Z, 使得

   (i) $X \leqslant_{st} Z$;

   (ii) $Z \leqslant_{sl} Y$, 且 $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(Y)$.

46. 给定 $b>0$, 设 $\mathcal{Y} = \{Y : \mathrm{E}(Y) = \mu, \Pr(0 \leqslant Y \leqslant b) = 1\}$, 其中 $0<\mu<b$. 若将 $\mathcal{Y}$ 中的元素依据止损序进行排序, 则 $\mathcal{Y}$ 中的最大元服从两点 (0 和 b) 分布, 记为 $Y_{\max}$:

$$\mathbb{P}\left(Y_{\max}=b\right)=\frac{\mu}{b}=1-\mathbb{P}\left(Y_{\max}=0\right);$$

   $\mathcal{Y}$ 中的最小元服从 μ 点的退化分布, 记为 $Y_{\min}$.

47. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是独立同分布的非负随机变量序列, N 和 M 是独立于上述两序列的计数随机变量. 若 $N \leqslant_{sl} M$, 则有

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \leqslant_{sl} \sum_{i=1}^{M} X_i.$$

48. 对于风险变量 X, 保费准则定义如下:

$$\Pi_X = v^{-1}(\mathbb{E}[v(X)]),$$

   其中对于 $x>0$, 函数 v 满足条件 $v'(x)>0, v''(x) \geqslant 0$.

   (i) 当 $v(x)=x^2$ 且 $X \sim \gamma(2,2)$ 时, 计算 Π_X;

   (ii) 举一反例说明该准则不是一致风险度量.

49. 一个一年期的风险的累积索赔服从复合泊松分布, 参数为 $\lambda>0$, 单个索赔额的分布为 $F(x)=1-e^{-ax}$ $(a>0)$, $x \geq 0$. 保险人决定采用自留额为 M 的超额赔款再保险对该风险进行分保，其中再保险保费通过参数为 $h<a$ 的 Esscher 准则计算.

   (i) 证明再保险费为 $\lambda a e^{-aM}/(a-h)^2$;

   (ii) 令 M^* 是使保险人的年末期望财富最大化的最优自留额，其中保险人的效用函数为 $u(x)=-e^{-\beta x}$, $0<\beta<a$. 证明

$$M^* = \frac{1}{\beta}\log\left(\frac{a^2}{(a-h)^2}\right).$$

50. 设 n 种投资产品的收益率和资产权重分别为 r_i 和 p_i $(i=1,2,\cdots,n)$, 且独立同分布, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$; 效用函数 $u(x)$ 为风险厌恶型. 证明：最优化问题

$$\max_{\langle p_i, i=1,\cdots,n\rangle} \mathrm{E}\left[u\left(\sum_{i=1}^{n} p_i r_i\right)\right],$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

   的解为 $p_i = \dfrac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$.

51. 在 Esscher 保费准则下, 保费定义为

$$\Pi_X = \frac{E\left[Xe^{hX}\right]}{E\left[e^{hX}\right]}, \qquad h > 0.$$

(i) 证明 Esscher 保费准则是关于 h 的增函数且 $\Pi_X \geq \mathbb{E}[X]$;

(ii) 计算 $X \sim \exp(\lambda)$ 的 Esscher 保费.

52. 设 n 个保险公司共同承担风险 X, 各个公司均采用指数保费原理, 参数分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 若各个公司分推的风险 (独立) 为 $X_1, X_2, \cdots, X_n\,(X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$, 则第 i 个公司的保费 P_i 满足:

$$P_i = \frac{1}{a_i} \ln E\left(\mathrm{e}^{a_i x_i}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

记总保费为 $P = \sum_{i=1}^{N} P_i$. 试推导使得 P 达到极小的风险分推方案.

53. 分析以下效用函数对应的决策者的风险态度以及风险厌恶系数: (i) $u(w) = \ln w, w > 0$; (ii) $u(w) = aw + b, a > 0, w > 0$; (iii) $u(w) = -\mathrm{e}^{-\alpha w}, \alpha > 0, w > 0$; (iv) $u(w) = w^r, 0 < r < 1, w > 0$; (v) $u(w) = w - \alpha w^2, w > 0, \alpha > 0$.

54. 设风险 X 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 对以下两个效用函数计算风险 X 的期望效用无差异选择 G(certainty equivalent): (i) $u(w) = k \ln w, w > 1$; (ii) $u(w) = w - 0.5w^2, 0 \leqslant w \leqslant 1$.

55. 令 $\alpha \in (0, 1)$，定义 $\mathrm{VaR}_\alpha : L^0 \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) \geq 1 - \alpha\}.$$

(注意，为了符号方便，这里 α 取的是较小的值例如 0.01, 0.1, 0.5 等.) 假设保险人面临损失为 X, 具有连续严格递增的分布函数且在 0 点处可能有非零的质量. 保险人采取止损再保形式转移风险给再保险人，转移风险为 $R(x) = (x - d)_+$, $x \geqslant 0, d \geqslant 0$. 再保费原则采取期望值原理，即 $\Pi[R(X)] = (1 + \rho)\mathbb{E}[R(X)] = (1 + \rho)\mathrm{E}\left[(X - d)_+\right] \triangleq \pi(d)$, 其中 $\rho > 0$ 为安全负荷系数. 保险人再保后的总风险为 $T_R(X, d) = X \wedge d + \pi(d)$. 证明 VaR 优化问题:

$$\min_{d>0}\left\{\mathrm{VaR}_\alpha(T_R(X, d))\right\}$$

最优自留额 $d^* > 0$ 存在的充分必要条件是 $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ 以及 $S_X^{-1}(\alpha) \geqslant S_X^{-1}\left(\rho^*\right) + \Pi\left(S_X^{-1}\left(\rho^*\right)\right)$, 其中 $S_X(x)$ 表示 X 的生存函数, 即 $S_X(x) = \bar{F}_X(x), \rho^* = \dfrac{1}{1+\rho}$, 并且当最优化问题的最优自留额 d^* 存在时, $d^* = \mathrm{VaR}_X\left(\rho^*\right)$, 总损失 $T_R(X, d)$ 的最小风险价值为

$$\mathrm{VaR}_\alpha(T_R\left(X, d^*\right)) = d^* + \pi\left(d^*\right).$$

56. 设有两个保险公司承保的风险分别为 X_1 和 X_2, 保费分别为 P_1 和 P_2, 初始资本分别为 R_1 和 R_2, 效用函数 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 分别为

$$u_i(x) = x - a_i x^2, \quad i = 1, 2.$$

求两个保险公司在风险交换后达到 Pareto 最优时的最后获得的风险 Y_1 和 Y_2 的形式.

57. 已知风险 X, 设风险转移的成本为 P(P 为常数), 决策者为风险厌恶型. 记

$$U = \{I(X) : (1 + \theta)\mathrm{E}[I(X)] = P, 0 \leqslant I(X) \leqslant X\}.$$

证明，在集合 U 给出的保费约束下, 期望效用最大的转移方式为止损方式, 即最优化问题

$$\max_{I\in U}\mathrm{E}\left\{u\left[w_0-X+I(X)-P\right]\right\}$$

的解为 $I_{d^*}(x)=(x-d^*)_+$, 其中 d^* 满足:

$$\mathrm{E}\left[I_{d*}(X)\right]=P.$$

58. 设保险人面临的风险 X 的概率分布已知, 效用函数为二次函数:

$$u(w)=w-\frac{1}{2c}w^2\quad(w(-\infty,c],c>0).$$

试根据期望效用原则 (即承担风险时期望效用效用不低于不承担风险的期望效用), 分析保险人在 X 满足什么条件时可接受风险? 若可接受风险，给出保险人的最小可接受保费 H, 并证明

$$\mathrm{E}(X)+\frac{\sigma^2(X)}{2c}<H<\mathrm{E}(X)+\frac{\sigma^2(X)}{c}.$$