金融期权 2023-2024

回忆人: 晓月

一、 设股票初始价值为 S_0，到期日为 T，执行价为 K。

(1) 请给出欧式看跌期权的定义与收益函数；

(2) 设对应欧式看跌期权价格为 p，无风险利率为 r。证明：$Ke^{-rT} - S_0 \leq p \leq K$。

二、 假设当前股票价格为 31 美元，3 个月后的欧式期权的执行价格为 30 美元，无风险年利率为 0，若 3 个月的欧式看涨期权的价格为 3 美元，而 3 个月的欧式看跌期权的价格为 2.5 美元。这时的价格是否满足平价关系式，是否产生套利机会？如果有，构造套利机会。

三、 设 $\{B_t; t \geq 0\}$ 是一维标准布朗运动。

(1) 证明，任意常数 $C > 0$，$X_t = CB_{t/C^2}$ 也是标准布朗运动；

(2) 利用 Ito 公式计算 $E[B_t^6]$，其中 EX 表示 X 的数学期望。

四、 (1) 设 $\{B_t; t \geq 0\}$ 是一维标准布朗运动，$\mathfrak{F}_t$ 是自然过滤，证明 $B_t^2 - t$ 是 $\mathfrak{F}_t$-鞅；

(2) 设随机变量 Y 期望存在，即 $E|Y| < \infty$。设 $X_t = E(Y|\mathfrak{F}_t)$，$\mathfrak{F}_t$ 是过滤。证明 X_t 是 $\mathfrak{F}_t$-鞅。

五、 给定执行价格 $K_1 > K_2 > K_3$，$c(K,T)$ 和 $C(K,T)$ 分别表示执行价格为 K，到期日为 T 的欧式看涨期权和美式看涨期权在 0 时刻的定价。

(1) 证明：$c(K_2,T) - c(K_1,T) \leq e^{-rT}(K_1 - K_2)$；

(2) 证明：$C(K_2,T) \leq \frac{K_2-K_3}{K_1-K_3}C(K_1,T) + \frac{K_1-K_2}{K_1-K_3}C(K_3,T)$。

六、 (1) 设股票现价为 S_0，执行价格为 K，执行时间为 T，股票的波动率为 σ，无风险利率为 r，请写出对应欧式看涨和欧式看跌期权价格 (Black-Scholes 公式)；

(2) 设有效期限为 1 年的看涨期权和看跌期权股票现价为 42 美元，执行价格为 40 美元，股票波动率为每年 0.2，无风险年利率为 0.1。即 $S_0 = 42, \quad K = 40, \quad \sigma = 0.2, \quad r = 0.1, \quad T = 1$。求其欧式看涨和欧式看跌期权价格。

(可能用到的数据 $\ln 1.05 = 0.0488, \ln 0.90 = -0.105, \Phi(0.844) = 0.800, \Phi(0.770) = 0.779, \Phi(0.644) = 0.739, \Phi(0.628) = 0.736.$ $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布函数值。)

注：建议大家备考时不仅要掌握知识，更要尽可能复现 PPT 的官方表述。