绝密★启用前

南开大学数学科学学院

信息论2024-2025期末测试卷

注意事项:

1. 命题人：光炫
2. 回忆人：xzqbear
3. 考试限时：100 分钟
4. 本次考试中文命题.
5. 考试时间：2025 年 1 月 7 日

一、解答题

1.（15 分）

设 (X,Y) 服从如下的联合概率分布：

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

（1）求 $H(X),H(X,Y),H(Y\mid X)$ 以及 $I(X;Y)$.

（2）绘制 (1) 中各量的 Venn 图.

（3）求 $D(p_x\|p_y)$ 和 $D(p_y\|p_x)$.

2.（15 分）

设 X 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 均为离散型随机变量，记 $Y^n=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 那么：

（1）若 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 关于 X 条件独立，求 $I(X;Y^n)$ 和 $\sum_{i=1}^{n} I(X;Y_i)$ 之间的大小关系.

（2）若 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 相互独立，(1) 中的结果又如何?

3.（15 分）

设离散型随机变量 X,Y 具有不交的字母表，且设

$$Z=\begin{cases} X, & P(Z=X)=\alpha \\ Y, & P(Z=Y)=1-\alpha \end{cases}$$

（1）试求 $H(Z)$ 关于 $H(X),H(Y)$ 和 α 的表达式.

（2）尝试对 α 进行最大化，证明 $2^{H(Z)}\leqslant 2^{H(X)}+2^{H(Y)}$.

4.（15 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n \overset{\text{i.i.d}}{\backsim} X$ ，熵为 $H(X)$ ，设

$$C_n(t)=\{x^n\in\mathcal{X}^n : p(x^n)\geqslant 2^{-nt}\}$$

（1）证明：$|C_n(t)|\leqslant 2^{nt}$.

（2）当 t 为何值时，有 $P\{X^n\in C_n(t)\}\to 1$?

5.（15 分）

设 X 为离散型随机变量，取三个值的概率分别为 $0.5, 0.4, 0.1$.

（1）构建 X 的二元 Huffman 编码并计算期望长度.

（2）构建 X 的二元 Shannon 编码并计算期望长度.

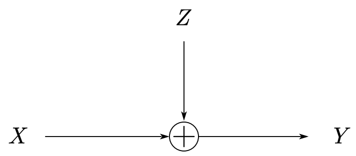
（3）求最小正数 D 使得 D 元 Huffman 码和 Shannon 码的长度相等.

6.（15 分）

两个错误概率均为 p 的 BSC 并联的信道容量是多少？串联时的信道容量又是多少？

7.（10 分）

求下列离散无记忆信道的信道容量：



其中 $Pr(Z=0)=Pr(Z=a)=0.5$. X 的字母表为 $\mathcal{X}=\{0,1\}$. 假设 Z 与 X 相互独立.