

2024-2025 学年实变函数期中考试

回忆：鸢喙

1. 试构造 \mathbb{R} 上测度为 1 的开稠集.
2. 若 $A \cup B = \mathbb{R}$, 求证 $\overline{A} \cup B^\circ = \mathbb{R}$.
3. 设 $\{A_n\}, \{B_n\}, \{C_n\}$ 为集合列, 满足 $A_n \subset B_n \subset C_n, \forall n \geq 1$.
若 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = D$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = D$.
4. 设 $E \subset \mathbb{R}$. 求证 $m^*(E) = \inf\{\sum_n \ell(I_n) : \{I_n\} \text{ 是一列有界闭区间且 } E \subset \bigcup_n I_n\}$
5. 设 $\{E_k\}_{k \geq 1}$ 是 $[0, 1]$ 中的可测集列, 使得 $m(E_k) \rightarrow 1 (k \rightarrow \infty)$. 求证: 存在子列 $\{E_{k_n}\}$ 使 $m\left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_{k_n}\right) = 1$.
6. 设 E 是 \mathbb{R} 上的零测集, 求证: $\{\sin x : x \in E\}$ 零测.
7. 已知函数 $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, 求证: $\{x : \lim_{y \rightarrow x} f(y) = 0\}$ 至多可数.