2024-2025学年度大类数学分析III期末测试

(含A，B卷)

命题人：李佳傲

2025 年 1 月 13 日

写在前面的几条温馨提示

其一，**心态要好**，李老师卷子以大计算量为特点，而且第一、二题级数举反例或者答案较丑的求值题容易让考生道心破碎，浪费大量时间，但实际上它们并不难。

其二，**熟练度很重要**，李老师的卷子，如果每一题都用笔者能想到的最简写法，其实完全可以在一小时内解决，但是如果在一些题忘记做法或者使用最无脑的算法就很容易导致不必要的失误。因此备考李老师的期末，建议把南开数学分析中的习题（含AB组题目，尤其是计算题）刷完。

其三，每年李老师基本都会考一题关于一致收敛与换序的课本命题证明题，如果你读课本比较仔细，或者拿卓里奇《数学分析》自学过，你可能会发现，使用课本16章证明的一些换序定理可以大幅简化证明，然而，**尽管没有明确在试卷上指出，在批卷实践中使用16章定理走捷径的方法是不被允许的，**这会导致不必要的失分，务必牢记。至于这道证明题的标准解答，应以19章所写的传统定义法（即使用ε-δ语言直接证明）为标准。

——————Annalysia Koirishi

此外，在此感谢回忆B卷的tjy同学，他似乎是唯一一个考了李老师B卷的人。

A卷

回忆人：Annalysia Koirishi

一、考虑发散的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，其中$u_n \le 2024$，并记S_n为第n部分和，试判断下列级数的收敛情况（一定收敛，一定发散还是可能收敛也可能发散）：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_{n+1}}$.

二、设$u_n(x)$是$[a,b]$上的函数，且$\exists \lim\limits_{x\to b-} u_n(x) =: u_n(b-), n = 1,2,...$，又函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(a,b)$上一致收敛，求证：

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} u_n(b-) = \lim_{x\to b-} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

三、(1)求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}$的和.

(2)求函数$f(x) = \frac{1}{1-3x+2x^2}$在$x=0$处的泰勒展开.

四、利用Γ、B函数求积分：

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4}{(x^2+1)^4} dx$$

五、求$f(x) = x$在$[-\pi,\pi]$的傅里叶展开，并由此求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$的值.

六、求积分：

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{e^{-4t}-e^{-2t}}{t} dt$$

$$(2) \int_0^{2} \frac{\ln(2+x)}{4+x^2} dx$$

B卷

回忆人：tjy

一、考虑收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，试判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(|a_n|+2024)^{1/n}}{n}$的收敛情况（一定收敛，一定发散还是可能收敛也可能发散）.

二、设$f(x,t)$是$[a,+\infty)\times[c,d]$上的连续函数，且$\int_a^{\infty} f(x,t)dx$关于$t\in[c,d]$一致收敛，求证：

$$\int_c^d dt\int_a^{\infty} f(x,t)dx=\int_a^{\infty} dx\int_c^d f(x,t)dt$$

三、(1)求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{n!}$的和.

(2)求函数$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$在$x=0$处的泰勒展开.

四、利用Γ、B函数求值：

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt[5]{\sin x}dx\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt[5]{\sin x}}dx$$

五、将$f(x)=\pi-x$在$[-\pi,\pi]$延拓为奇函数，然后求其傅里叶展开和傅里叶级数的和函数，并由此求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$的值.

六、求积分：

$$(1)\int_0^{\infty}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$$

$$(2)\int_0^{\pi/2}\ln(4-\cos x)dx$$