

# 2024-2025学年第一学期复变函数期末考试

出题人：高泳昕

回忆人：jpp

一、求  $\frac{z-2}{z(z-1)}$  在  $|z| > 1$  中的 *Laurent* 展开

二、求  $\frac{1}{1-e^{\frac{1}{z}}}$  在扩充复平面的奇点并指出相应类型

三、计算  $\int_{|z|=4} \frac{z^{13}}{(z^2+1)(z^4+2)^3} dz$

四、设  $u$  是  $\mathbb{C}$  上的调和函数,  $f \in H(\mathbb{C})$ , 求证:  $u \circ f$  也是  $\mathbb{C}$  上的调和函数

五、设  $\mathbb{D}$  是复平面中的单位开圆盘,  $H = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z > 0\}$ , 求  $H$  到  $\mathbb{D}$  的所有解析自同构

六、设  $f, g$  是  $\mathbb{C}$  上的亚纯函数, 且  $|f(z)| \leq |g(z)|$ , 求证: 存在常数  $c$ , 使得  $f(z) = cg(z)$

七、设  $f(z)$  在  $|z| > 1$  中解析, 对任意的  $r \in (0, 1)$ ,  $I(r) = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^4 d\theta$ ,  
求证:  $I(r)$  关于  $r \in (0, 1)$  单调递增