2024-2025 学年第二学期数学类概率论期末考试

回忆：鸢喙

1. (a) 一个袋子里有 4 个白球和 5 个红球, 从中不放回的连续取三个球, 求结果顺序为“红白红”的概率;

(b) 两个人约定在 7 点到 8 点在某地会面, 先到的人等候另一人 20 分钟, 过时就可离去, 试求两人能会面的概率.

2. 设 ξ 是取值于正整数的随机分布. 求证 ξ 具有无记忆性 (即对任意的正整数 n, k, $k > n$, $P(\xi = k|\xi > n) = P(\xi = k - n)$) 当且仅当 ξ 为几何分布.

3. (a) 求 $\xi \sim P(\lambda)$ 的母函数;

(b) 求 $\eta \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的特征函数.

4. 设 ξ 满足 $E\xi = 0$ 且 $D\xi = \sigma^2 < \infty$. 求证: $\forall \varepsilon > 0$,

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2},$$
$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}.$$

5. (a) 若 (ξ, η) 的密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

试验证: ξ 与 η 不相关, 但它们不独立.

(b) 若 $P(X = C) = 1$, C 是一个常数, 求证: X 和任何一个随机变量 Y 相互独立;

6. (a) 证明: 若 ξ_n r 阶收敛于 ξ, 则 ξ_n 依概率收敛于 ξ.

(b) 举例说明逆命题不成立.

7. (a) 叙述弱收敛的定义;

(b) 证明海莱第二定理: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $\{F_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上弱收敛于 $F(x)$ 的一致有界非降函数列, a,b 是 $F(x)$ 的连续点, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) dF_n(x) = \int_a^b f(x) dF(x).$$