金融期权 2024-2025

回忆人: 晓月

一年前的回忆很可能不准确, 在题号后标星号的是凭借模糊印象找的类似题目, 没标的能确定是原题.

一、 * 设股票初始价值为 S_0，到期日为 T，执行价为 K。

(1) 请给出欧式看跌期权的定义与收益函数；

(2) 设对应欧式看跌期权价格为 p，无风险利率为 r。证明：$Ke^{-rT} - S_0 \leq p \leq K$。

二、 在无套利市场中，考虑一个两年期的欧式看跌期权，股票的执行价格为 52，当前价格为 50。假设价格为两步二叉树，每个步长为一年，在每个单步二叉树中股票价格或者按比率上升 20%，或者按比率下降 20%。设无风险连续利率为 5%。求该欧式看跌期权的价值。（保留两位小数）

三、 设一交易组合的 Delta 中性，Gamma 为 -5000，Vega 为 -8000。另可用期权有期权一、期权二。如何达到 Gamma、Vega 中性，并保持 Delta 中性？

	Delta	Gamma	Vega
组合	0	-5000	-8000
期权一	0.6	0.5	2.0
期权二	0.5	0.8	1.2

四、 * 设 M 是连续平方可积鞅（即 $M \in H^2$），且具有有限二次变差过程 $\langle M, M \rangle$。考虑左连续简单过程

$$H = H_{-1} 1_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} H_i 1_{(t_i, t_{i+1}]}$$

其中 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ 是时间分割，H_i 是 $\mathcal{F}_{t_i}$-可测的随机变量。

定义 H 关于 M 的随机积分为：

$$(H\cdot M)_t=\sum_{i=0}^{n-1}H_i(M_{t_{i+1}\wedge t}-M_{t_i\wedge t}),\quad t\ge 0.$$

证明以下性质 (中的若干个)：

(1) 设 $H^{(1)}$ 和 $H^{(2)}$ 是简单过程，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则

$$(\alpha H^{(1)}+\beta H^{(2)})\cdot M=\alpha(H^{(1)}\cdot M)+\beta(H^{(2)}\cdot M);$$

(2) 对任意 $N\in H^2$，有

$$\langle H\cdot M,N\rangle_t=\int_0^t H_s d\langle M,N\rangle_s;$$

(3)（零均值性）$\mathbb{E}[(H\cdot M)_t]=0$;

(4)（等距性）$\mathbb{E}[(H\cdot M)_t^2]=\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M,M\rangle_s\right]$;

(5) $(H\cdot M)_t^2-\int_0^t H_s^2 d\langle M,M\rangle_s$ 是一个鞅。

五、 * 给定执行价格 $K_1>K_2>K_3$，$c(K,T)$ 和 $C(K,T)$ 分别表示执行价格为 K，到期日为 T 的欧式看涨期权和美式看涨期权在 0 时刻的定价。

(1) 证明：$c(K_2,T)-c(K_1,T)\le e^{-rT}(K_1-K_2)$；

(2) 证明：$C(K_2,T)\le\dfrac{K_2-K_3}{K_1-K_3}C(K_1,T)+\dfrac{K_1-K_2}{K_1-K_3}C(K_3,T)$。

六、 (1) 设股票现价为 S_0，执行价格为 K，执行时间为 T，股票的波动率为 σ，无风险利率为 r，请写出对应欧式看涨和欧式看跌期权价格（Black-Scholes 公式）；

(2) 设有效期限为 1 年的看涨期权和看跌期权股票现价为 42 美元，执行价格为 40 美元，股票波动率为每年 0.2，无风险年利率为 0.1。即 $S_0=42$, $K=40$, $\sigma=0.2$, $r=0.1$, $T=1$。求其欧式看涨和欧式看跌期权价格。

（可能用到的数据 $\ln 1.05=0.0488$, $\ln 0.90=-0.105$, $\Phi(0.844)=0.800$, $\Phi(0.770)=0.779$, $\Phi(0.644)=0.739$, $\Phi(0.628)=0.736$。$\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布函数值。）

注：建议大家备考时不仅要掌握知识，更要尽可能复现 PPT 的官方表述。