2024 春省身班动态进出考试常微分方程解答

卢远（Collaborate with Deepseek-R1）

2025 年 2 月 14 日

一、设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，且对 $\forall x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$，都有

$$|2xf(x,y_1) - 2xf(x,y_2)| \leq |y_1 - y_2|$$

证明：任意给定 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$，方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$ 的满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解唯一. （**方程解的存在性无需证明**）

解答：考虑初值问题 $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ 满足 $y(x_0) = y_0$，将其改写为积分方程：

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

定义算子 T 作用于连续函数空间：

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

需证明 T 是压缩映射. 根据题设条件，对任意 $x \neq 0$ 和 $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$，有

$$\big|2x[f(x,y_1) - f(x,y_2)]\big| \leq |y_1 - y_2| \implies |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \frac{|y_1 - y_2|}{2|x|}.$$

情形 1：$x_0 = 0$**.** 令 $z(x) = y(x) - y_0$，则 $z(0) = 0$，方程变为：

$$z(x) = \int_0^x f(t, z(t) + y_0)\, dt.$$

定义函数空间 $\mathcal{X} = \{z \in C^1([-h,h]) \mid z(0) = 0\}$，赋予加权范数：

$$\|z\|_* = \sup_{x \neq 0} \frac{|z(x)|}{|x|}.$$

对任意 $z_1, z_2 \in \mathcal{X}$，算子 T 满足：

$$\begin{aligned}
|Tz_1(x) - Tz_2(x)| &\leq \int_0^x \frac{|z_1(t) - z_2(t)|}{2|t|}\, dt \\
&\leq \int_0^x \frac{\|z_1 - z_2\|_* \cdot |t|}{2|t|}\, dt \\
&= \frac{\|z_1 - z_2\|_*}{2} |x|.
\end{aligned}$$

因此，

$$\|Tz_1 - Tz_2\|_* = \sup_{x \neq 0} \frac{|Tz_1(x) - Tz_2(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{2} \|z_1 - z_2\|_*,$$

说明 T 是压缩因子为 $\frac{1}{2}$ 的压缩映射. 由 Banach 不动点定理，存在唯一不动点 $z^* \in \mathcal{X}$，对应原方程的唯一解 $y(x) = z^*(x) + y_0$.

情形 2：$x_0 \neq 0$**.** 选取区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 使得 $|x| \geq \frac{|x_0|}{2} > 0$. 此时条件给出：

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \frac{|y_1 - y_2|}{2|x|} \leq \frac{|y_1 - y_2|}{|x_0|}.$$

取 $h < |x_0|$，则 Lipschitz 常数为 $L = \frac{h}{|x_0|} < 1$. 在标准范数 $\|y\| = \sup_x |y(x)|$ 下，对任意 y_1, y_2：

$$\|Ty_1 - Ty_2\| \leq Lh\|y_1 - y_2\|,$$

当 h 足够小时，$Lh < 1$，T 为压缩映射. 故由 Picard-Lindelöf 定理存在唯一解.

综上，对任意初值 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$，方程的解唯一.

二、可以直接使用的结论：

对任意 n 阶实矩阵 A 及任意 $b > 0$，存在 n 阶实矩阵 F 满足 $A^2 = e^{bF}$.

设 $b > 0$，$\Phi(t)$ 是齐次线性方程组 $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ 的基解矩阵，其中 $A(t)$ 为 n 阶实矩阵函数，每个元素均为连续函数，且 $A(t)$ 以 b 为周期. 证明：存在实矩阵 F 及以 $2b$ 为周期的实矩阵函数 $P(t)$ 满足

$$\Phi(t) = P(t)e^{bF}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

这就是实值版本 Floquet 定理.

解答：设 $\Phi(t)$ 是基解矩阵，先证明存在实常数矩阵（单值化矩阵）M 满足平移关系

$$\Phi(t + b) = \Phi(t)M.$$

因为

$$\frac{d}{dt}\Phi(t + b)\Phi(t)^{-1} = 0.$$

由平移关系进一步递推可得

$$\Phi(t + 2b) = \Phi(t)M^2.$$

根据题目给定的结论（对任意实矩阵 A 及 $b > 0$，存在实矩阵 F 使得 $A^2 = e^{bF}$），取 $A = M$ 并将参数 b 替换为 $2b$，则存在实矩阵 F 满足

$$M^2 = e^{2bF}.$$

定义矩阵函数

$$P(t) = \Phi(t)e^{-tF},$$

验证其 $2b$-周期性：

$$P(t + 2b) = \Phi(t + 2b)e^{-(t+2b)F} = \Phi(t)M^2 e^{-2bF}e^{-tF}.$$

代入 $M^2 = e^{2bF}$ 后，

$$P(t + 2b) = \Phi(t)e^{2bF}e^{-2bF}e^{-tF} = \Phi(t)e^{-tF} = P(t),$$

表明 $P(t)$ 确实以 $2b$ 为周期. 因此，基解矩阵可分解为

$$\Phi(t) = P(t)e^{tF},$$

其中 $P(t)$ 是 $2b$-周期的非奇异实矩阵函数，F 为实常数矩阵.

三、考虑以下非线性方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{y+1}{4} - \frac{1}{4(y+1)^3}$$

设 $y = \varphi(x)$ 为满足 $\varphi(t) > -1$ ($\forall t \in \mathbb{R}$) 的一个解. 证明: $\varphi(x)$ 为周期函数. [1]

解答: 将原方程改写为平面系统. 令 $v = \frac{dy}{dx}$, 则得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = v \\ \frac{dv}{dx} = \frac{y+1}{4} - \frac{1}{4(y+1)^3} \end{cases}$$

构造能量函数 $E(y,v) = \frac{1}{2}v^2 + V(y)$, 其中势能函数满足 $V'(y) = -\frac{y+1}{4} + \frac{1}{4(y+1)^3}$. 积分得

$$V(y) = -\frac{1}{8}(y+1)^2 - \frac{1}{8(y+1)^2}$$

对能量函数求导得

$$\frac{dE}{dx} = v\frac{dv}{dx} + V'(y)\frac{dy}{dx} = v\left(\frac{y+1}{4} - \frac{1}{4(y+1)^3}\right) - v\left(\frac{y+1}{4} - \frac{1}{4(y+1)^3}\right) \equiv 0$$

能量守恒表明相轨迹为闭合曲线（E 的等值线），故解 $\varphi(x)$ 为周期函数.

四、证明: 第三题中的函数 $\varphi(x)$ 的周期为 2π.

本题可能有误，一般情况周期需要椭圆积分无法求出精确值，2π 只是能量最低点附近的近似.

解答: 对于保守系统，力函数为 $f(x) = -\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4x^3}$，其势能函数为:

$$V(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{1}{8x^2}.$$

总能量为:

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{x^2}{8} + \frac{1}{8x^2}.$$

当 $E > \frac{1}{4}$ 时，系统存在闭轨，周期 T 为:

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2\left(E - \frac{x^2}{8} - \frac{1}{8x^2}\right)}},$$

其中转折点 x_1, x_2 由方程 $x^4 - 8Ex^2 + 1 = 0$ 确定，解为:

$$x_{1,2} = \sqrt{4E \pm \sqrt{16E^2 - 1}}.$$

积分无法进一步用初等函数简化，需数值计算.

在势能极小值 $x = 1$ 附近（对应 $E \approx \frac{1}{4}$），进行泰勒展开:

$$V(x) \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

线性化方程为:

$$\ddot{y} + y = 0 \quad (y = x - 1),$$

其解为简谐振动 $y(t) = A\cos(t + \phi)$，周期为:

$$T_0 = 2\pi.$$

[1] 网上的卷子右式有误，x 应为 y.

$$T = 2\int_{\sqrt{4E-\sqrt{16E^2-1}}}^{\sqrt{4E+\sqrt{16E^2-1}}} \frac{dx}{\sqrt{2E - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4x^2}}}.$$

线性近似周期：当 $E \approx \frac{1}{4}$ 时，周期 $T \approx 2\pi$.

补充

本节主要补充最后两题用到的有关保守能量系统的结论. 考虑二阶自治微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0,$$

其中 $f(x)$ 为连续可微函数. 假设系统为保守系统，即存在势能函数 $V(x)$ 满足：

$$f(x) = \frac{dV}{dx}.$$

系统的总能量 E 定义为：

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x),$$

且沿轨迹保持常数.

轨线为闭轨的数学解释

考虑一维保守系统：

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad f(x) = \frac{dV}{dx},$$

其总能量为：

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x).$$

能量守恒意味着 E 沿轨迹恒定，即相空间中的运动被限制在等能线 $E=$ 常数 上. 在相平面 $(x, \dot{x})$ 中，等能线方程为：

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}.$$

在以下条件满足后，轨线闭合，从而得到周期解：

- **势能存在局部极小值**
  势能 $V(x)$ 在某一区间内存在局部极小值 $V_{\min}$，使得当 $E > V_{\min}$ 时，方程 $V(x) = E$ 存在两个实根 x_1 和 x_2（转折点）.
- **等能线紧致性**
  在 $x_1 \le x \le x_2$ 内，$V(x) < E$，且等能线在该区间内形成闭合曲线.
- **无平衡点干扰**
  等能线不包含平衡点（即 $f(x) \neq 0$ 或 $V'(x) \neq 0$ 在 $x_1 < x < x_2$ 内）.

闭合轨迹的严格证明　由于 $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ 且 $V(x)$ 在 x_1 和 x_2 之间连续，系统在相空间中的轨迹被限制在区域 $x_1 \le x \le x_2$ 内，速度 $\dot{x}$ 有界.

从 x_1 到 x_2 再返回的时间为周期 T，由积分给出：

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}.$$

若积分收敛，则运动是周期性的.

在二维相空间中，紧致（有界且闭合）的等能线拓扑等价于圆环 S^1. 根据 Poincaré-Bendixon 定理，若轨迹被限制在紧致区域且不含平衡点，则必为闭轨.

保守系统周期的求解方法

能量守恒方程给出：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) = E.$$

解出速度：

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}.$$

运动的转折点 x_1 和 x_2 由方程 $V(x) = E$ 确定，即：

$$x_1 = \min\{x \mid V(x) = E\}, \quad x_2 = \max\{x \mid V(x) = E\}.$$

周期积分公式　周期 T 为粒子从 x_1 运动到 x_2 再返回的时间的两倍：

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}.$$

通过变量替换 $V(x) = E - \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$，积分表达式可严格导出.

示例　例 1：多项式势能 $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$（谐振子）

转折点：$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}}$.

周期积分：

$$T = 2\int_{-x_2}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E - \frac{1}{2}kx^2)}} = \frac{2}{\sqrt{k}}\int_{-x_2}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x_2^2 - x^2}}.$$

令 $x = x_2 \sin\theta$，积分化简为：

$$T = \frac{2}{\sqrt{k}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}.$$

例 2：周期势能 $V(x) = -\cos x$（单摆方程）

转折点：由 $-\cos x = E$ 得 $x_{1,2} = \pm\arccos(-E)$（当 $|E| < 1$）.

周期积分：

$$T = 2\int_{-x_2}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E + \cos x)}}.$$

令 $k = \sin\left(\frac{x_2}{2}\right)$，通过变量替换 $\sin\phi = \frac{\sin(x/2)}{k}$，积分转换为第一类椭圆积分：

$$T = 4\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}} = 4K(k),$$

其中 $K(k)$ 为第一类完全椭圆积分.

例 3：四次势能 $V(x) = \frac{1}{4}x^4$

转折点：$x_{1,2} = \pm(4E)^{1/4}$.

周期积分：

$$T = 4\int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E - \frac{1}{4}x^4)}}.$$

令 $t = x/x_2$，积分转换为贝塔函数：

$$T = \frac{4}{\sqrt{2E}}x_2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{4}{\sqrt{2E}}(4E)^{1/4} \cdot \frac{\Gamma(1/4)^2}{4\sqrt{2\pi}}.$$

线性近似计算周期

性近似是一种将非线性系统在平衡点附近简化为线性系统的方法，用于估算小振幅振动的周期. 其核心思想是利用泰勒展开对势能函数进行二次近似，从而将运动方程转化为简谐振子方程. 该方法在小振幅振动时高度精确，为复杂非线性系统提供了简洁的周期估算工具.

确定平衡点与势能展开　考虑保守系统的势能函数 $V(x)$，其平衡点 x_0 由势能极小值确定：

$$V'(x_0) = 0, \quad V''(x_0) > 0.$$

在 x_0 附近对 $V(x)$ 进行泰勒展开：

$$V(x) \approx V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2 + \mathcal{O}\left((x-x_0)^3\right).$$

忽略高阶小项（$\mathcal{O}((x-x_0)^3)$），势能近似为：

$$V(x) \approx V(x_0) + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2, \quad k = V''(x_0).$$

线性化运动方程　系统的动力学方程为：

$$\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \approx -k(x-x_0).$$

令 $y = x - x_0$（位移变量），方程变为：

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{k}.$$

这是标准的简谐振子方程，其通解为：

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi),$$

周期为：

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{V''(x_0)}}.$$

线性近似的有效性条件

- **小振幅条件**
  位移 $y = x - x_0$ 足够小，使得高阶项 $\mathcal{O}(y^3)$ 可忽略.
- **势能光滑性**
  势能 $V(x)$ 在 x_0 处二阶可导，且 $V''(x_0) > 0$（局部极小值）.
- **能量接近极小值**
  总能量 $E \approx V(x_0)$，确保运动范围限制在平衡点附近.

示例　原问题的线性近似原问题中势能函数为:

$$V(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{1}{8x^2}.$$

求平衡点由 $V'(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{4x^3} = 0$，解得 $x_0 = 1$. 计算二阶导数

$$V''(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4x^4} \quad \Rightarrow \quad V''(1) = 1.$$

线性化势能

$$V(x) \approx V(1) + \frac{1}{2}V''(1)(x-1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

运动方程与周期线性化方程为:

$$\ddot{y} + y = 0 \quad (y = x - 1),$$

周期为:

$$T_0 = 2\pi.$$