2024 春省身班动态进出考试数学分析 III 解答

卢远（Collaborate with Deepseek-R1）

一、$\alpha > 0$，计算积分：

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-x}}{x}\right)^2 dx \quad (\alpha > 0).$$

解答：展开平方项

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-x}}{x}\right)^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\alpha x} - 2e^{-(\alpha+1)x} + e^{-2x}}{x^2} dx$$

分部积分（令 $dv = \frac{dx}{x^2}$）：

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^{+\infty} \left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-(\alpha+1)x} + e^{-2x}\right) d\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-(\alpha+1)x} + e^{-2x}\right) dx \end{aligned}$$

求导并整理

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-(\alpha+1)x} + e^{-2x}\right) = -2\alpha e^{-2\alpha x} + 2(\alpha+1)e^{-(\alpha+1)x} - 2e^{-2x}$$

代入后得

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{-2\alpha e^{-2\alpha x} + 2(\alpha+1)e^{-(\alpha+1)x} - 2e^{-2x}}{x} dx$$

重组为 Frullani 积分

$$\begin{aligned} I = 2\alpha &\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\alpha+1)x} - e^{-2\alpha x}}{x} dx \\ &+ 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\alpha+1)x} - e^{-2x}}{x} dx \end{aligned}$$

应用 Frullani 公式 $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$：

$$\begin{aligned} I &= 2\alpha \ln \frac{2\alpha}{\alpha+1} + 2\ln \frac{2}{\alpha+1} \\ &= 2(\alpha+1)\ln(\alpha+1) - 2\alpha \ln(2\alpha) - 2\ln 2 \end{aligned}$$

最终结果

$$\boxed{2(\alpha+1)\ln(\alpha+1) - 2\alpha \ln(2\alpha) - 2\ln 2}$$

二、计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{e^{x^n} + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} dx.$$

解答：考虑极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{e^{x^n}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\,dx.$$

对任意 $x\in[0,1)$，当 $n\to\infty$ 时，$x^n\to 0$ 且 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\to e^x$，故分母收敛到 $1+e^x$. 当 $x=1$ 时，分母收敛到 $2e$. 因此被积函数逐点收敛到

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^x}, & x\in[0,1),\\ \dfrac{1}{2e}, & x=1.\end{cases}$$

进一步，对任意 $x\in[0,1]$ 和 $n\geq 1$，有

$$e^{x^n}\geq 1,\quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leq e^x,$$

从而分母满足 $e^{x^n}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\geq 1$，即被积函数被常数 1 控制. 由控制收敛定理，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{e^{x^n}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}\,dx.$$

令 $u=e^x$，则 $du=e^x dx$，积分变为

$$\int_1^e \frac{1}{u(1+u)}\,du=\int_1^e\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du=\left[\ln u-\ln(1+u)\right]_1^e.$$

计算得

$$(\ln e-\ln(1+e))-(\ln 1-\ln 2)=1-\ln(1+e)+\ln 2=1+\ln\frac{2}{1+e}.$$

故所求极限为

$$\boxed{1+\ln 2-\ln(1+e)}.$$

三、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $a_n>0$，且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leq 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+\frac{1}{n^2},$$

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性.

解答：根据 Extended Bertrand's test，数列 a_n 发散.

四、求 $f(x)=\arcsin(\cos x)$ 的傅里叶级数（$-\pi\leq x\leq\pi$），并计算：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}.$$

解答：考虑函数 $f(x)=\arcsin(\cos x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数. 首先观察到 $f(x)$ 可简化为分段线性函数：

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-|x|\quad(-\pi\leq x\leq\pi).$$

由于 $f(x)$ 是偶函数，其傅里叶级数仅含余弦项：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx),$$

其中系数为:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(nx)\,dx.$$

通过分部积分计算得:

$$a_n = \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \quad (n = 2k-1,\ k = 1, 2, \dots),$$

其余 $a_n = 0$. 因此傅里叶级数为:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos\left((2k-1)x\right).$$

应用 Parseval 恒等式:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right)^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\right)^2.$$

计算左边积分:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right)^2 dx = 2\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 dx = \frac{\pi^3}{6},$$

故左边为:

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

右边展开为:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2k-1)^4} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}.$$

联立得:

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

最终结果为:

$$\boxed{\frac{\pi^4}{96}}$$

五、设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 R,和函数为 $S(x)$. 任意取定 $x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$,令

$$R' = \min\{x_0 + R - x_1, x_1 - (x_0 - R)\},$$

求证:$S(x)$ 在 x_1 处的 Taylor 级数在 $(x_1 - R', x_1 + R')$ 中绝对收敛且收敛到 $S(x)$.

解答 1 (数学分析): 设幂级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 R, 取定 $x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$. 将原级数改写为以 x_1 为中心的展开形式:

$$(x - x_0)^n = (x - x_1 + x_1 - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x_1 - x_0)^{n-k}(x - x_1)^k$$

代入原级数得双重求和:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x_1 - x_0)^{n-k}(x - x_1)^k$$

由绝对收敛性交换求和顺序:

$$S(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=k}^{\infty}a_n\binom{n}{k}(x_1-x_0)^{n-k}\right](x-x_1)^k$$

此即 $S(x)$ 在 x_1 处的 Taylor 级数. 令 $R'=\min\{x_0+R-x_1,x_1-(x_0-R)\}$，对任意 $|x-x_1|<R'$，存在 $\rho>1$ 使得 $|x-x_1|\cdot\rho<R'$. 选取 r 满足 $|x-x_1|<r<R'$，则原级数在 $|x-x_0|<R$ 内绝对收敛. 由二项式展开的绝对收敛性，双重求和在 $|x-x_1|<R'$ 时绝对收敛. 因此，新级数在 (x_1-R',x_1+R') 内绝对收敛到 $S(x)$.

解答 2（复变函数）: 幂级数 $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 在收敛圆 $|z-z_0|<R$ 内解析. 取 $z_1\in(z_0-R,z_0+R)$，由解析函数的 Taylor 定理，$S(z)$ 在 z_1 处可展开为:

$$S(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S^{(k)}(z_1)}{k!}(z-z_1)^k$$

其收敛半径 R' 为 z_1 到收敛圆边界的最短距离，即 $R'=\min\{R-|z_1-z_0|,|z_1-z_0|+R\}$，化简得 $R'=\min\{z_0+R-z_1,z_1-(z_0-R)\}$. 由唯一性定理，此 Taylor 级数与原级数在重叠区域 $|z-z_1|<R'$ 内一致，故绝对收敛到 $S(z)$.

六、设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为边界光滑的有界单连通区域，$u\in C^2(D)$ 且满足

$$\Delta u=0\quad\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

以及边界条件

$$u+\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial D}=0,$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 ∂D 的单位外法向量. 证明:

$$u\equiv 0,\quad\forall(x,y)\in D.$$

解答: 考虑调和函数 $u\in C^2(D)$ 满足 $\Delta u=0$ 及边界条件 $u+\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0$. 应用 Green 第一恒等式:

$$\int_D|\nabla u|^2\,dA=\int_{\partial D}u\frac{\partial u}{\partial n}\,ds.$$

由边界条件 $\frac{\partial u}{\partial n}=-u$，代入得:

$$\int_D|\nabla u|^2\,dA=-\int_{\partial D}u^2\,ds.$$

左边非负，右边非正，故两边均为零. 因此:

$$|\nabla u|=0\quad\text{在}D\text{ 内},\quad u=0\quad\text{在}\partial D\text{ 上}.$$

由 $\nabla u=0$ 知 u 为常数，结合边界条件得常数为零，故

$$u\equiv 0\quad\text{在}D\text{ 内}.$$

即

$$\boxed{u\equiv 0}.$$