题目 1. 已知曲线 L: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 记 $I=\oint_L(b^2x^2+2xy+a^2y^2)\mathrm{d}s$, 记 L 为椭圆周长,S 为椭圆面积. 证明: $I=\frac{LS^2}{\pi^2}$.

题目 2. 记 S 是面 $x-y+z=4, x=0, y=0, z=0$ 的所围成立体的内侧, 求第二型曲面积分

$$\iint_S(x+y+\cos z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z+\cos x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x-\cos y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

题目 3. 已知积分 $\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关, 且已知对于任意的实数 z, 均成立

$$\int_{(0,0)}^{(1,z)}3x^2y\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(z,1)}3x^2y\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

求函数 Q.

题目 4. 判断以下级数的收敛性 (条件收敛, 绝对收敛, 发散)

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{2025}{n}\cdot\arctan\ln n$

题目 5. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 与无穷乘积 $\prod\limits_{i=1}^{n}(1+a_n)$ 同时收敛或同时发散.

题目 6. 判断以下积分的收敛性 (绝对收敛, 条件收敛, 发散)

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p}\mathrm{d}x(p>0)$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln(1+\frac{\cos 2x}{x^p})\mathrm{d}x(p>0)$