实变动态进出

一、设$E \subset \mathbb{R}^2$，Λ 是 E 的一个开覆盖，证明 Λ 中可以选出一个可数子集为 E 的开覆盖。

二、$\{f_k\}$ 是 $[0,1]$ 上的一列可测函数，$f_k(x) \to 0$ 对几乎所有的 x , 证明存在可数集
$X = \{t_k\} \subset \mathbb{R}$，满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |t_k| = \infty$ 并且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |t_k f_k(x)| < \infty$ 。

三、1.设 $\{E_k : 1 \leq k \leq n\}$ 是区间 $(-l, l)$ 上的 n 个可测集，且 $\sum\limits_{k=1}^{n} m(E_k) > 2l(n-1)$ ，证明：

$$m(\bigcap_{k=1}^{n} E_k) > 0$$

2. 设 E 是一个具有正测度的可测集，证明对任意的正整数 n ，我们都可以在 E 中找到长度为 n 的等差数列。

四、$\{f_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一列非负可测函数，满足 $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = 1$ ，而且对任意的 $\delta > 0$ ，都有 $\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\delta} f_n(x)\mathrm{d}x = 0$ ，证明

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n^2(x)\mathrm{d}x = \infty$$

五、设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，证明 f 可导的点构成的集合是一个可测集。