2024-2025 学年第二学期高等代数与解析几何
第一次月考

一、(15 分) 用可逆线性替换将下述实二次型化为规范型，并求出它的符号差。

$$2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4.$$

二、(15 分) 当实数 a 取何值时，矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

正定?

三、(15 分) 已知基组:

$$\mathrm{I} : \{-1, x-2, x^2-3\}$$
$$\mathrm{II} : \{x-1, x+1, x^2-x\}$$

是 $\mathbb{R}[x]_3$ 的两组基。求:

1. 从基 I 到基 II 的过渡矩阵;
2. 多项式 x^2+x+1 在基 II 下的坐标。

四、(15 分) 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

并设线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解空间为 V。证明:

1. 所有使方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解的向量 $\mathbf{b}$ 构成线性空间 W;
2. 求 $V \cap W$ 的维数和一组基。

五、(15 分) 设向量空间:

$$V = \{f(x) \in P[x]_4 \mid 3f(1) - f'(1) = f(0) = 0\},$$
$$W = \{g(x) \in P[x]_4 \mid g(-x) = g(x)\}.$$

1. 证明 $P[x]_4 = V \oplus W$;
2. 定义映射 $\mathcal{F} : W \to V$ 为

   $$\mathcal{F}(g(x)) = xg(x) - 2g(0)x^2, \quad \forall g(x) \in W.$$

   证明 $\mathcal{F}$ 是同构映射。

六、(10 分) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间。证明存在映射 $f : P \to V$，使得对 P 中任意 n 个互不相同的数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，向量组 $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$ 都线性无关。

七、(10 分) 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$，且 A 为正定矩阵，B 为半正定矩阵。求证：当 $t > 0$ 时，

$$|tA + B| \geq t^n|A|.$$