

数学学院本科生2023 — 2024学年第1学期抽象代数 I 课程期末考试试卷(A卷)

平时成绩: _____ 期中成绩: _____ 卷面折合成绩: _____ 总成绩: _____ (平时成绩:期中考试成绩:期末考试成绩比例 20:20:60)

专业: _____ 年级: _____ 学号: _____ 姓名: _____

题目	一	二	三	四	五	六	卷面成绩
得分							

草稿区

一、判断题. 判断下列论断是否正确, 若正确, 给出简要证明, 否则举反例说明. (本题共 20 分, 每小题 5 分)

1. 若 K 是群 G 的非空子集, 且 $K^2 = K$, 则 K 是 G 的子群.
2. 若 G 是群, 则 G 中的所有有限阶元素构成 G 的一个子群.
3. 设 R 为幺环, S 为 R 的子环, S 也是幺环, 但 R, S 的幺元不同. 如果 a 是 S 中的可逆元, 则 a 一定不是 R 中的可逆元.
4. 设 R 为无限整环, $u, v \in R$, 且 $u \neq 0, v \neq 0$, 则 $\{ku + lv | k, l \in \mathbb{Z}\}$ 是无限的集合.

二、(本题 20 分) 设 R 为整环, $u \in R$, 且 u 不是单位, 称 u 为 R 中的一个泛边缘算子, 如果对任何 $a \in R$, 或者 $u | a$, 或者存在 R 中单位 ε 使得 $u | a + \varepsilon$. 试证明任何 Euclid 环中一定存在泛边缘算子, 并求出整数环 \mathbb{Z} 中的所有泛边缘算子.

草稿区

三、(本题 20 分) 1) 在 S_{15} 群中求出元素 α 的阶, 其中

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 9 & 6 & 7 & 1 & 2 & 8 & 15 & 13 & 11 & 5 & 3 & 4 & 10 & 14 & 12 \end{pmatrix}.$$

2) 试问群 S_{23} 中有多少 11 阶元?

四、(本题15分) 设 R 为非零环, 且对任何 $a \neq 0$, 存在唯一 $b \in R$ 使得 $aba = a$, 证明: 1)
 R 为无零因子环; 2) 对于上述元素 a, b , 我们有 $bab = b$; 3) R 为幺环; 4) R 为除环.

草稿区

五、(本题15分) 1) 设 G 为交换群, 且 $|G| = n$. 证明对 n 的任何正整数因子 m , 存在 G 的子群 H 使得 $|H| = m$.
2) 试举例说明1)的结论对于一般群不成立.

六、(本题10分) 设群 G 的阶为455, 试证明 G 为循环群.

草稿区