

南开大学本科生2023 - 2024学年第一学期《常微分方程》期末考试试卷(A卷)

草稿区

任课教师:            专业:            年级:            学号:            姓名:            成绩:

得分
----

一、(50分) 求解常微分方程

1.  $y'' + 3y' + 4y = 0$  满足初值  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .

2.  $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}, y(1) = 1$ .

3.  $2xy''y' = 1 + (y')^2$

4.  $y = px \ln x + (xp)^2, p = \frac{dy}{dx}$ .

5.  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^{xy}$ .

得分

二、(10分)

1. 求解  $\frac{dy}{dx} + \frac{2+xy^3}{2+x^3y} = 0$ 。
2. 求解  $2yy'' = 1 + (y')^2$ 。

得分

三、(15分)

1. 假设 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xQ - 2yP$$

试证明方程 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 有积分因子 $\mu = e^{x^2+y^2}$ 。

2. 已知 $f(x)$ 连续, 且满足

$$f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt,$$

求 $f(x)$ 。

3. 求解 $x'' + 2x' + 5x = \sin 2t$ 。



得分

四、(10分) 1. 求解 $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x$ .

2. 求解 $x' = -x - y + t^2, y' = -y - z + 2t, z' = -z + t$ .

得分

- 五、(10分) 1. 证明  $x' = 2y, y' = -x^3$  的零解是稳定的, 不是渐进稳定的。  
2. 判断以下动力系统奇点(0,0)的类型  $x' = x + 2y, y' = 5y - 2x$ .

南开大学本科生2023 - 2024学年第一学期《常微分方程》期末考试试卷(A卷)

草稿区

得分

六、(5分) 证明：考虑系统  $x' = X(x, y), y' = Y(x, y)$ . 这里  $X(x, y), Y(x, y)$  在单连通区域  $D$  上是  $C^1$  的, 若于  $D$  中存在  $C^1$  函数  $h(x, y)$  使得散度  $\operatorname{div}(hX, hY) = \frac{\partial(hX)}{\partial x} + \frac{\partial(hY)}{\partial y} \neq 0$  在  $D$  中保持定号, 且不在  $D$  的任何子区域恒等于 0, 则系统在  $D$  中无闭轨. 构造合适的函数  $h$  证明  $x' = y, y' = x + y + y^2$  在平面中无闭轨.