

数学学院本科生2024–2025学年第1学期抽象代数I课程期末考试试卷( A卷)

专业: 年级: 学号: 姓名:

题目	一	二	三	四	五	六	卷面成绩
得分							

一、判断题. 判断下列论断是否正确, 若正确, 给出简要证明, 否则举反例说明. (本题共 20 分, 每小题 5 分)

草稿区

1. 设  $G$  为有限交换群,  $n$  为正整数, 且  $n \mid |G|$ , 则  $G$  中存在  $n$  阶子群.
2. 设  $\{\mathbb{C}; +\}$  是全体复数在加法下形成的群,  $\{\mathbb{C}^*; \times\}$  是全体非零复数在乘法下形成的群, 则  $\{\mathbb{C}; +\}$  与  $\{\mathbb{C}^*; \times\}$  同构.
3. 设  $R$  为欧几里得环,  $R_1$  是  $R$  的子环, 则  $R_1$  也是欧几里得环.
4. 设  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-a}]$  不是唯一分解整环, 其中  $a$  为正整数, 则  $R$  中必存在不可约元素  $p$  使得  $p$  不是素元.

二、(本题 20 分) (1) 试求群  $S_{15}$  中元素

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 8 & 5 & 3 & 1 & 2 & 15 & 13 & 11 & 4 & 6 & 9 & 7 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

草稿区

的阶.(本小题 10 分)

(2) 试问在交错群  $A_{15}$  中有多少 7 阶元? (本小题 10 分)

三、(本题 20 分) 试证明在整环  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  中  $9 + 2\sqrt{-5}$  是素元, 而  $2 + \sqrt{-5}$  是不可约元但不是素元.

四、(本题15分) 试证明99阶群都是交换群.

草稿区

五、(本题15分) 设  $R$  为整环,  $a, b \in R$ , 若  $c \in R$  且  $a|c, b|c$ , 则称  $c$  为  $a, b$  的一个公倍式.

若  $a, b$  的一个公倍式  $m$  能够整除  $a, b$  的任何一个公倍式, 则称  $m$  为  $a, b$  的一个最小公倍式.

- 1) 证明: 若  $R$  为唯一分解整环, 则  $R$  中任何两个元素都存在最小公倍式.
- 2) 证明: 在整环  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  中, 元素  $a = 2 + 2\sqrt{-3}, b = 4$  不存在最小公倍式.

草稿区

六、(本题10分) 设  $R, R'$  为幺环. 一个  $R$  到  $R'$  的映射  $\eta$  称为一个 Jordan 同态如果

- (1)  $\eta$  是加法群  $\{R; +\}$  到  $\{R'; +\}$  的群同态;
- (2)  $\eta(1) = 1'$ , 其中  $1, 1'$  分别为  $R, R'$  的乘法单位元;
- (3) 对任何  $a, b \in R$ ,  $\eta(aba) = \eta(a)\eta(b)\eta(a)$ .

草稿区

试证明: 如果  $\eta : R \rightarrow R'$  是一个 Jordan 同态, 且  $R'$  为整环, 则对任何  $a, b \in R$ ,  
 $\eta(ab) = \eta(a)\eta(b)$  或  $\eta(ab) = \eta(b)\eta(a)$  至少有一个成立.