2024-25 秋季随机过程复习参考题目（mch 老师）

整理人：21 级 lyy，grc

注 这些题目包括老师留的作业题和复习题目，复习时要全部做完；从中选择了六道题（下面的第一、二、四、六、十、十一题）作为期末考试题目.

Borel-Cantelli 引理 部分题目

一、已知 $(X_i)_{i=1}^{\infty}\, i.i.d.$，并且 $X_i \sim N(0,1)$. 记 $M_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{X_1, \ldots, X_n\}$.

求证：$\dfrac{M_n}{\sqrt{2\log n}} \overset{a.s.}{\to} 1$.

高斯过程 部分题目

二、已知 $\{B_t : t \geqslant 0\}$ 为高斯过程，定义 $X_t = B_t - tB_1$，其中 $0 < t < 1$. 证明 X_t 也是一个高斯过程，并求 $cov\,(X_t, X_s)$，$0 < t, s < 1$.

Poisson 过程 部分题目

三、设 $X_1, X_2 \ldots X_n$ 是独立的、有共同密度函数 f 的连续型随机变量，以 $X_{(i)}$ 记 $X_1, X_2 \ldots X_n$ 中第 i 个最小者.

(a) 证明 $X_{(i)}$ 的密度函数为

$$f_{X_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\left(F(x)\right)^{i-1}\left(\overline{F}(x)\right)^{n-i} f(x)$$

其中 $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy, \overline{F}(x) = 1 - F(x)$.

(b) 说明 $P\left(X_{(i)} \leqslant x\right) = \displaystyle\sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k}\left[F(x)\right]^k\left[\overline{F}(x)\right]^{n-k}$.

(c) 由前面两小题，证明如下概率恒等式

$$\sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} = \int_0^y \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1}(1-x)^{n-i}\, dx.$$

(d) 以 T_i 记 Poisson 过程 $N(t), t \geqslant 0$ 的第 i 个事件的到来时刻，求

$$E\left[T_i | N(t) = n\right]$$

（注意分 $i \leqslant n$ 与 $i > n$ 两种情况）.

(e) 计算在 $T_n = t$ 条件下，$T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ 的条件密度函数.

四、**定义** 记数过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为非齐次 $Poisson$ 过程，具有强度函数 $\lambda(t), t \geqslant 0$，若：

(i) $N(0) = 0$

(ii) $N(t), t \geqslant 0$ 具有独立增量

(iii) $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)\, h + o(h)$

(iv) $P\{N(t+h) - N(t) \geqslant 2\} = o(h)$.

证明：$N(t+s) - N(t)$ 服从参数为 $\int_t^{t+s} \lambda(u)\, du$ 的 $Poisson$ 分布.

五、设 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 与 $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ 分别为参数 λ, μ 的 $Poisson$ 过程，且 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 与 $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ 相互独立. 记 $T_1 = \min\{t \geqslant 0 : Y(t) = 1\}$. 计算 $P(X(T_1) = k)$，$k = 0, 1, 2\ldots$ 与 $P\left(X(\frac{T_1}{2}) = k\right)$，$k = 0, 1, 2\ldots$

（选作： 记 $T_a = \min\{t \geqslant 0 : Y(t) = a\}$,$a \in \mathbb{Z}^*$. 计算 $P(X(T_a) = k)$）

六、设 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为参数 λ 的 $Poisson$ 过程.$\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ $i.i.d$ 为非负随机变量序列且其共同分布的密度函数为 $G(y) = P(Y_1 \leqslant y)$. 求 $P(Z(t) > z | N(t) > 0)$，其中 $Z(t) = \min\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N(t)}\}$.

鞅 部分题目

七、设 $\{\xi_{n,i}, n \geqslant 0, i \geqslant 1\}$, $i.i.d$ 为整值随机变量. 定义 Galton-Watson 分枝过程 $\{Z_n : n \geqslant 0\}$ 满足:

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n-1,i},\ Z_0 = 1,$$

若记 $\mu = E[\xi_{n,i}] > 1$, 且 $var(\xi_{n,i}) = \sigma^2 > 0$, 试证明当 $n \to \infty$, 在 L^2 收敛意义下，$\frac{Z_n}{\mu^n} \to W$ 并且 $E[W] = 1$.

(提示： 考虑 $p = 2$ 时的 L^p 收敛定理，需证 $\sup\limits_n \left[E\left(\frac{Z_n}{\mu^n}\right)^2\right] < \infty$).

八、(本题为教材 Th 4.8.7) 考虑简单对称随机游动 $\{S_n, n \geqslant 0\}$, $S_n = x + \sum_{k=1}^{n} \xi_k$,$\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ $i.i.d.$, 且 $P(\xi_k = 1) = P(\xi_k = -1) = \frac{1}{2}$. (注意 $S_0 = x$). 令 $N = \inf\{n \geqslant 0, S_n \notin (a, b)\}$, 且 $x \in (a, b)$. 证明:

(i) $P(S_N = a) = \frac{b-x}{b-a}$

(ii) $E[N] = (b-x)(x-a)$.

九、考虑简单对称随机游动 $\{S_n, n \geqslant 0\}$，即每步步长 $\xi_n = S_n - S_{n-1}$ 服从 $P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = -\frac{1}{2}$. 初始位置 $S_0 = 0$, 令 $T_1 = \min\{n \geqslant 0 : S_n = 1\}$. 求证 $E\left[s^{T_1}\right] = \frac{1-\sqrt{1-s^2}}{s}$, $0 \leqslant s \leqslant 1$.

十、(本题出自教材 Th 4.8.9,为第八题的变形) 考虑非对称随机游动,即满足 $P(\xi_i = 1) = p$, $P(\xi_i = -1) = q = 1 - p$ 且 $p \neq q$. 证明如下结论：

(a) 若 $\phi(y) = \left[\frac{1-p}{p}\right]^y$，则 $\phi(S_n)$ 为鞅

(b) 初始位置 $S_0 = x$，令 $T_z = \inf\{n : S_n = z\}$，则对于 $a < x < b$，有

$$P_x(T_a < T_b) = \frac{\phi(b) - \phi(x)}{\phi(b) - \phi(a)}, \quad P_x(T_b < T_a) = \frac{\phi(x) - \phi(a)}{\phi(b) - \phi(a)}$$

以下两小题设 $\frac{1}{2} < p < 1$

(c) 若 $a < 0$，则 $P\left(\min_n S_n \leqslant a\right) = P(T_a < \infty) = \left[\frac{1-p}{p}\right]^{-a}$

(d) 若 $b > 0$，则 $P(T_b < \infty) = 1$，且 $E(T_b) = \frac{b}{2p-1}$.

马氏链 部分题目

十一、设 $(X_n, n \geqslant 0)$ 为马氏链，有限状态空间 $\{0, 1, 2, \ldots, M\}$ $(M > 0)$, 0 和 M 为吸收态，除此以外无其它吸收态. 若 $(X_n, n \geqslant 0)$ 同时也为鞅，计算 $\lim_{n\to\infty} P_a(X_n = M)$，其中 $a \in \{0, 1, 2, \ldots, M\}$.

（就要毕业了，给学弟学妹们尽一份微薄之力）