

数学科学学院本科生伯苓班 2025 — 2026 学年第一学期《数学分析 3-3》期中考试试卷 (A 卷)

草稿区

任课教师: 专业: 年级: 学号: 姓名: 成绩:

得 分

1、(20 分) 设 $\beta > 0$, 讨论以下级数收敛性.

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\beta}-1}{n^{\beta}+1} \cos^2 \frac{\pi}{n}$$

草稿区

得分

2、(15 分) 以下两题若存在相应例子，请给出例子，否则给出证明。

- (i). $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上是否存在有界光滑函数 u 满足 $\Delta u = 0$;
- (ii). $\mathbb{H} = \{(x, y) : x > 0\}$ 上是否存在有界光滑函数 u 满足 $\Delta u = 0$.

草稿区

得分

3、(15 分) 设非负数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 满足 $a_n \leq (\frac{\epsilon}{n})^n, n = 1, \dots$, 证明:

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_{n=1}^\infty a_n r^n}{r} \leq 1.$$

草稿区

得分

4、(15 分) 证明：对于任何实数序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow +\infty$)，有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛。

草稿区

得分

5、(20 分) 计算曲面积分：

$$I = \iint_{S^+} (x + y - z)dydz + [2y + \sin(z + x)]dzdx + (3z + e^{x+y})dxdy,$$

其中 S^+ 为曲面 $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$ 的外表面。

草稿区

得分

6、(15 分) 证明：

$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2 + y^2) dx dy$ 不收敛。

注：该题可以直接使用结论 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ；完全证出该结论可额外得 5 分，证不出不扣分。