25级数学分析I第2次月考试题参考解答

一、(本题共15分) 设$y=x^3\sin x$, 求$y^{(10)}$.

解 由高阶导数的Leibniz公式，有

$$\begin{aligned}
& y^{(10)} \\
= \;& x^3\,(\sin x)^{(10)}+\mathrm{C}_{10}^{1}(x^3)'\,(\sin x)^{(9)}+\mathrm{C}_{10}^{2}(x^3)''\,(\sin x)^{(8)}+\mathrm{C}_{10}^{3}(x^3)'''\,(\sin x)^{(7)} \\
= \;& x^3\cdot(-\sin x)+10\cdot 3x^2\cdot\cos x+45\cdot 6x\cdot\sin x+120\cdot 6\cdot(-\cos x) \\
= \;& -x^3\sin x+30x^2\cos x+270x\sin x-720\cos x.
\end{aligned}$$

□

二、(本题共15分) 设$y=y(x)$是由方程$y=1+x\mathrm{e}^y$确定的隐函数，求$y=y(x)$的一阶导数y'和二阶导数y''.

解法一 方程$y=1+x\mathrm{e}^y$两边对x求导，得

$$y'=\mathrm{e}^y+x\mathrm{e}^y y'.$$

解得

$$y'=\frac{\mathrm{e}^y}{1-x\mathrm{e}^y}.$$

由原方程得$x\mathrm{e}^y=y-1$, 代入上式得

$$y'=\frac{\mathrm{e}^y}{2-y}. \tag{1}$$

再将(1)式两边对x求导，得

$$y''=\frac{\mathrm{e}^y(2-y)-\mathrm{e}^y\cdot(-1)}{(2-y)^2}\cdot y'=\frac{(3-y)\mathrm{e}^y}{(2-y)^2}\cdot y'.$$

将(1)式代入上式，得

$$y''=\frac{(3-y)\mathrm{e}^y}{(2-y)^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^y}{2-y}=\frac{(3-y)\mathrm{e}^{2y}}{(2-y)^3}.$$

□

解法二 方程$y=1+x\mathrm{e}^y$两边对x求导，得

$$y'=\mathrm{e}^y+x\mathrm{e}^y y'. \tag{1}$$

解得

$$y'=\frac{\mathrm{e}^y}{1-x\mathrm{e}^y}. \tag{2}$$

再将(1)式两边对x求导，得

$$y''=\mathrm{e}^y y'+\mathrm{e}^y y'+x\mathrm{e}^y\left(y'\right)^2+x\mathrm{e}^y y''.$$

解得

$$y''=\frac{2\mathrm{e}^y y'+x\mathrm{e}^y\left(y'\right)^2}{1-x\mathrm{e}^y}.$$

将(2)式代入上式，得

$$y''=\frac{2\mathrm{e}^y\cdot\frac{\mathrm{e}^y}{1-x\mathrm{e}^y}+x\mathrm{e}^y\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^y}{1-x\mathrm{e}^y}\right)^2}{1-x\mathrm{e}^y}=\frac{\mathrm{e}^{2y}\left(2-x\mathrm{e}^y\right)}{\left(1-x\mathrm{e}^y\right)^3}. \qquad \square$$

三、(本题共15分) 设函数$f(x)$是区间(a,b)上的下凸函数. 证明: 对于任何$x\in(a,b)$, 左导数$f'_-(x)$和右导数$f'_+(x)$都存在并且有$f'_-(x)\leqslant f'_+(x)$.

证 对任意固定的$x\in(a,b)$, 由三弦引理知，对任意$h_1,h_2\in(a-x,0)$, $h_1<h_2$, 有

$$\frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}\leqslant\frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2},$$

即$\varphi(h)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$作为$h$的函数在$(a-x,0)$单调递增. 同理可知$\varphi(h)$在$(0,b-x)$也单调递增. 记$\delta=\min\{x-a,b-x\}>0$, 由三弦引理知，对任意$h\in(0,\delta)$, 有

$$\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\leqslant\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

即对任意$h\in(0,\delta)$, 有$\varphi(-h)\leqslant\varphi(h)$. 因此，$\varphi(h)$在$(x-a,0)$单调递增有上界，在$(0,b-x)$单调递增有下界. 由单调函数的单侧极限存在定理知$f'_-(x)=\lim\limits_{h\to0^-}\varphi(h)$和$f'_+(x)=\lim\limits_{h\to0^+}\varphi(h)$都存在. 在$\varphi(-h)\leqslant\varphi(h)$两边令$h\to0^+$取极限，由极限的保序性得$f'_-(x)\leqslant f'_+(x)$. $\square$

四、(本题共15分) 证明: 对于任何$x \in (0,1)$, 存在唯一的$\theta(x) \in (0,1)$, 使得$\ln(1+x) = \dfrac{x}{1+\theta(x)x}$成立. 并求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)$.

证 令$f(x)=\ln(1+x)$, 则$f(x)$在$(-1,+\infty)$上可导. 对于任何$x\in(0,1)$, 由拉格朗日中值定理知存在$\theta(x)\in(0,1)$, 使得

$$\ln(1+x) = f(x)-f(0) = f'\left(\theta(x)x\right)(x-0) = \frac{x}{1+\theta(x)x}.$$

由$\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\theta(x)x}$解得

$$\theta(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)},$$

故满足条件的$\theta(x)$是唯一的. 当$x\to 0^+$时，有$\ln(1+x)\sim x$, 故由等价无穷小量替换和洛必达法则得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\theta(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

注 也可以用泰勒公式来计算$\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)$.

五、(本题共15分) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\tan x}\cdot\sin x-(1+x)x}{\ln(1+x^2)\cdot\sin x}$.

解 当$x\to 0$时，有$\ln(1+x^2)\sim x^2$, $\sin x\sim x$, 故$\ln(1+x^2)\cdot\sin x\sim x^3$. 记$f(x)=\tan x$, 则由$f(x)$是奇函数知$f'(x)$是偶函数，$f''(x)$是奇函数，从而$f(0)=f''(0)=0$. 由$f'(x)=\sec^2 x$得$f'(0)=1$, 故$\tan x = x+o(x^2)$ $(x\to 0)$. 进而得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\tan x} &= 1+\tan x+\frac{1}{2}\tan^2 x+o(\tan^2 x)\\ &= 1+\left(x+o(x^2)\right)+\frac{1}{2}\left(x+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\\ &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\quad (x\to 0).\end{aligned}$$

因此由等价无穷小量替换和泰勒公式得

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}\cdot\sin x-(1+x)x}{\ln(1+x^2)\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}\cdot\sin x-(1+x)x}{x^3}\\
= & \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)-(1+x)x}{x^3}\\
= & \lim_{x\to 0}\frac{\left(x+x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)-(1+x)x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+o(1)\right)\\
= & \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

□

六、(本题共15分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，满足$f(0)=2$, $f(1)=1$. 证明: 存在$\xi\in(0,1)$, 使得$2f(\xi)+f'(\xi)\left(\xi+\dfrac{1}{\xi}\right)=0$成立.

证 令$\varphi(x)=(x^2+1)f(x)$, 则由题设条件知$\varphi(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，满足$\varphi(0)=2=\varphi(1)$. 由罗尔定理知存在$\xi\in(0,1)$, 使得$\varphi'(\xi)=0$, 即

$$2\xi f(\xi)+(\xi^2+1)f'(\xi)=0.$$

又因为$\xi>0$, 所以上式两边同除以ξ就得到

$$2f(\xi)+f'(\xi)\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)=0.$$

□

七、(本题共10分) 设函数$f(x)$在$[0,2]$上两次可导，$f(0)=f(2)=0$, $f(x)$的最小值为-1. 证明: 存在$\xi\in(0,2)$, 使得$f''(\xi)=2$.

证 由最值定理知存在$x_0\in[0,2]$, 使得x_0是$f(x)$的一个最小值点. 根据题设条件知$x_0\in(0,2)$, $f(x_0)=-1$. 由费马定理知$f'(x_0)=0$. 于是由泰勒公式，有

$$0=f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x_0)^2=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2,\quad 0<\xi_1<x_0,$$

$$0=f(2)=f(x_0)+f'(x_0)(2-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(2-x_0)^2=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(2-x_0)^2,\quad x_0<\xi_2<2.$$

于是$f''(\xi_1)=\dfrac{2}{x_0^2}$, $f''(\xi_2)=\dfrac{2}{(2-x_0)^2}$. 若$x_0=1$, 则取$\xi=\xi_1$, 就有$f''(\xi)=\dfrac{2}{x_0^2}=2$; 若$x_0\neq 1$, 则$x_0\in(0,1)$或者$x_0\in(1,2)$, 从而$f''(\xi_1)$和$f''(\xi_2)$这两个数中，一个大于2, 另一个小于2, 故由达布定理知存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(0,2)$使得$f''(\xi)=2$. $\square$