南开大学 2024-2025 学年度第二学期

数学省身班《概率论》期末考试

作者：淘气的小杨桃

1. 设 $\mathscr{L}$ 是空间 Ω 之子集组成的非空类，P 是非空类上的实值函数，证明：可列可加性与有限可加性和下连续性等价.

◀ $\Rightarrow$ 若不相交的事件列 $\{A_k\}$, 有 $\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_k)$, 则令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$，即可证明有限可加性.

且对于单调递增列 $\{B_n\}$,，令 $B_0 = \varnothing$，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) &= \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \backslash B_{k-1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(B_k \backslash B_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(B_k \backslash B_{k-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(B_k) - \mathrm{P}(B_{k-1}) \\
&= \mathrm{P}(B_n).
\end{aligned}$$

证明了下连续性.

$\Leftarrow$ 对不相交的事件列 $\{A_k\}$, 令 $B_k = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, 根据有限可加和下连续性, 有 $\mathrm{P}(B_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k)$，当 $n \to \infty$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

即证明了可数可加性. ▶

2. 已知随机变量 ξ 的分布 F 连续，证明：$F(\xi)$ 为随机变量且服从均匀分布 $\mathrm{U}(0,1)$.

◀ 因为 $\{F(\xi)\le y_0\}=\{\xi\le F^{-1}(y_0)\}$，其中 F^{-1} 是 F 广义逆，从而容易证明其为随机变量.

根据分布函数的性质，显然 $0\le F(\xi)\le 1$，且

$$\mathrm{P}(F(\xi)\le y_0)=\mathrm{P}(\xi\le F^{-1}(y_0))=FF^{-1}(y_0)=y_0,$$

从而 $F(\xi)\sim \mathrm{U}(0,1)$. ▶

3. 设 X_1,X_2,X_3 之间的相关系数分别为 $\rho_{12},\rho_{13},\rho_{23}$，且有 $\mathrm{E}(X_i)=0,\mathrm{Var}(X_i)=\sigma^2\neq 0,i=1,2,3$. 已知 $Y_1=X_1+X_2,Y_2=X_2+X_3,Y_3=X_1+X_3$，求证：$Y_i,i=1,2,3$ 之间两两不相关当且仅当 $\rho_{12}+\rho_{13}+\rho_{23}=-1$.

◀ $Y_i,i=1,2,3$ 之间两两不相关

$\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)=\sigma^2(\rho_{12}+\rho_{13}+\rho_{23}+1)=0,$

$\Leftrightarrow \rho_{12}+\rho_{13}+\rho_{23}=-1.$ ▶

4. 证明：$\mathrm{E}\dfrac{\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mathrm{E}X_i\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mathrm{E}X_i\right)^2}\to 0$ 当且仅当 X_i 服从大数定律.

◀ 令 $Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mathrm{E}X_i$，因此我们只证明

$$Y_n\xrightarrow{p}0\Leftrightarrow E\left[\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2}\right]\to 0.$$

$\Rightarrow$ 根据定义，对任意 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(X_n>\varepsilon)=0$，从而

$$\begin{aligned}E\left[\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2}\right]&=E\left[\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2}1_{|Y_n|\le\varepsilon}\right]+E\left[\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2}1_{|Y_n|>\varepsilon}\right]\\&\le\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}+E[1_{|Y_n|>\varepsilon}]\\&\to 0.\end{aligned}$$

这是因为 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ 是单调递增函数，且有上界 1.

$\Leftarrow$ 根据单调性，显然当 $Y_n>\varepsilon$ 时，有

$$\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2}>\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2},$$

且

$$E\left[\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2}\right]\geq\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}P(|Y_n|>\varepsilon).$$

从而

$$P(|Y_n|>\varepsilon)\leq\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}E\left[\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2}\right]\to 0.$$

证明了依概率收敛性. ▶

5. 已知 $X_n\xrightarrow{w}X$，$Y_n\xrightarrow{p}0$，求证：$X_nY_n\xrightarrow{p}0$.

◀ 即 Slutsky 定理的一种形式，教材给了证明过程，这里不过多赘述. ▶