

数学学院2024年春季省身班动态进出选拔抽象代数 试题

本试卷满分 100 分, 共 5 道题, 所有题目都是解答题, 必须写出必要的步骤.

1. (本题 20 分) 设群 G 的阶为 24, 且 $C(G) = \{e\}$, 试证明 $G \simeq S_4$.
2. (题 20 分) 试决定整环 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 的全部单位, 并证明 $3 + 2\sqrt{-5}$ 是 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 中的素元.
3. (本题 20 分) 设 G 为群, 且不包含指数为 2 的子群. 证明 G 中指数为 3 的子群一定是正规子群.
4. (本题 20 分) 设 R 为有限么环, 且 $|R| = pq$, 其中 p, q 为互异的素数. 证明 R 的任何非平凡子环 (即非零的真子环) 都是域.
5. (本题 20 分) 设 G 为单群, 且 $|G| \geq 4$. 试证明不存在 G 的真子群 H 使得 $[G : H] \leq 4$.