

2025-2026 学年度《现代分析基础》期末考试

出题人：张震球 考试时间：2026 年 6 月 2 日 10:00–11:40

每题 20 分，满分 100 分

1. (20 分) 设 $A \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$, 叙述 A 的 α 维 Hausdorff 测度的定义, 并证明: 若 $0 < \alpha < \beta < \infty$ 且 $\mathcal{H}_\alpha(A) < \infty$, 则 $\mathcal{H}_\beta(A) = 0$.
2. (20 分) 设 μ 是 X 上的 σ -有限测度, $(L^\infty(X, d\mu))^*$ 是 $L^\infty(X, d\mu)$ 的对偶空间. 证明在同构意义下, $L^1(X, d\mu) \subset (L^\infty(X, d\mu))^*$, 并举例说明此为真包含.
3. (20 分) 设 m 是 \mathbb{R}^n 上的 Lebesgue 测度, 证明 $L^1(\mathbb{R}^n, dm)$ 是完备的.
4. (20 分) 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, \hat{f} 是它的 Fourier 变换, 且 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 证明下式几乎处处成立:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

5. (20 分) 设 φ 是 (X, \mathcal{A}) 上的符号测度, 证明: 存在正集 $P \in \mathcal{A}$, 使得 $P^c = X \setminus P$ 是 φ 的负集.