

南开大学 2025-2026 学年度第二学期

数学科学学院《点集拓扑学》期末考试

考试时间：2026 年 6 月 23 日 16:00~17:40 满分：100 分

作者：淘气的小杨桃

- (10 分) X 是拓扑空间, Y 是 X 的子空间, 而 $A \subseteq Y$, 证明: $\text{int}_Y A \supseteq A^\circ$.
- (10 分) 可分的度量空间的任意子空间可分.
- (10 分) 已知正则空间 X 中的闭集 F 和 $x \in X \setminus F$, 证明: 存在开集 U, V , 使得 $x \in U, F \subseteq V, \bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.
- (10 分) 已知 X 是紧空间, Y 是 Hausdorff 空间, 映射 $f: X \rightarrow Y$ 是连续满射, 证明: f 是商映射.
- (10 分) 证明: \mathbb{R} 的子空间 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 可被完备度量化的, 但是不是局部紧的.
- (10 分) 已知 X 是第二可数空间, 那么存在没有孤立点的闭集 P , 使得 $X \setminus P$ 可数.
- (10 分) 已知 $X = \prod_{i \in J} X_i$, 证明: X 是 Hausdorff 空间当且仅当每一个 $X_i (i \in J)$ 都是 Hausdorff 空间.
- (10 分) 已知 X 是完全正则空间, A 是 X 的紧子集, B 是 X 的闭子集, 证明: 存在连续函数 f 满足 $f = \begin{cases} 0, x \in A; \\ 1, x \in B. \end{cases}$.
- (10 分) 已知 X 是连通的, A 是 X 的连通子集, 且存在 $X \setminus A = U \cup V$, 其中 U, V 是不相交的开集, 证明: $U \cup A$ 是连通的.
- (10 分) 已知 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续满映射, 证明: f 是商映射.