

2025-2026 学年第二学期高等代数与解析几何期 末试题 A 卷

1.(15 分) 设柱面的准线为

$$\begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ x = 2z \end{cases}$$

母线垂直于平面 $x = 2z$, 求柱面的方程。

2.(15 分) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3.$$

(1) 求正交线性替换 $X = QY$, 将 $f(X)$ 化成标准形;

(2) 证明: $\min_{X \neq 0} \frac{f(X)}{X^T X} = 2$.

3.(15 分) 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 设平面 $z = ax + b$ 与双曲抛物面 $x^2 - y^2 = z$ 的交线为 Γ . 求 a, b 满足什么条件时, Γ 是两条相交直线; 并写出这两条直线的方程。

4.(15 分) 设欧氏空间 V 中的一组向量 e_1, e_2, \dots, e_m 满足

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

求证: $\forall v \in V, \|v\|^2 \geq \sum_{i=1}^m (v, e_i)^2$, 且等号对所有 $v \in V$ 成立当且仅当 e_1, e_2, \dots, e_m 构成 V 的一组基。

5.(15 分) V 是数域 P 上的线性空间, \mathcal{A} 是空间 V 上的线性变换。 $f(x), f_1(x), f_2(x) \in P[x]$, 且 $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, $(f_1(x), f_2(x)) = 1$. 则

$$f(\mathcal{A})^{-1}(0) = f_1(\mathcal{A})^{-1}(0) \oplus f_2(\mathcal{A})^{-1}(0).$$

6.(15 分) 设 P 为数域, V 是数域 P 上的有限维线性空间, V_1, V_2, W 均为 V 的子空间。证明:

$$\dim(W \cap V_1) + \dim(W \cap V_2) \leq \dim W + \dim(W \cap V_1 \cap V_2).$$

并举例说明该不等式的等号不一定成立。

7.(10分) 证明: $n \geq 2$ 时, 不存在一个 n 阶矩阵 B , 使得 n 阶若尔当块 $J(0, n) = B^2$ 。