

2025-2026学年数学分析II第一次月考

第一题

在 \mathbb{R}^2 中有一 k ($k \geq 1$)次齐次多项式函数 (即对于任意实数 t , $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$), 在闭区域 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ 上有界. 证明

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

第二题

求椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, (a, b, c > 0)$ 的体积

第三题

在闭区间 $[0, a]$ 上有可积函数 f, g , 其中 $f(x) = f(a - x), g(x) + g(a - x) = k$
证明:

$$(1) \int_0^a f(x)g(x) dx = \frac{k}{2} \int_0^a f(x) dx$$

$$(2) \text{ 计算 } \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

第四题

f 在 $[0, 1]$ 上单减, $\alpha \in (0, 1)$, 证明

$$\int_0^\alpha f(x) dx \geq \alpha \int_0^1 f(x) dx$$

第五题

\mathbb{R}^n 中定义 $\text{dis}(x, A) = \inf\{|x - y| : y \in A\}$, 若 A 是闭集

(1) 证明: 存在 $y \in A$ 使得 $|x - y| = \text{dis}(x, A)$

(2) 证明: 若 $x \notin A$ 则 $\text{dis}(x, A) > 0$

第六题

\mathbb{R}^2 中有函数 $f(x, y)$ 关于 x 连续, 关于 y 满足利普希斯条件, 即存在 L , 使对于任意的 $x, y', y'' \in \mathbb{R}$, 有 $|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L|y' - y''|$ 证明 $f(x, y)$ 连续

第七题

f 在 $[0, 1]$ 上连续可导, 证明

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \max \left\{ \int_0^1 |f'(x)| dx, \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \right\}$$