2025-2026学年数学分析II第二次月考

第一题

证明

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

在点$(0,0)$处可微

第二题

证明对于$\mathbb{R}^3$中的可微函数$f(x,\,y,\,x)$与三个两两垂直的单位向量$\overrightarrow{u_1},\,\overrightarrow{u_2},\,\overrightarrow{u_3}$
有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\overrightarrow{u_1}}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\overrightarrow{u_2}}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\overrightarrow{u_3}}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial 2}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$$

其中$\left(\frac{\partial f}{\partial\overrightarrow{u_i}}\right)^2$是以$\overrightarrow{u_1}$为方向的方向导数.

第三题

证明

$$\sin x+\ln y-xy^3=0$$

在$(0,1)$有确定的函数f使得$y=f(x)$. 并求$f'(0)$.

第四题

证明：在$|x|,\,|y|$充分小时

$$\frac{\cos x}{\cos y}\approx 1-\frac{1}{2}(x^2-y^2)$$

第五题

证明$[0,1]\times[0,1]$上的函数$f(x,y)=\sqrt{xy}$ 不利普西斯连续

第六题

对于定义在$[a,b]\times[c,d]$上的函数$f(x,y)$, 有f连续且f'_x连续, 定义$g(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$, 证明: $g'(x)$存在, 且$g'(x)=\int_c^d f'_x(x,y)\,\mathrm{d}y$

第七题

凸区域$D \subseteq \mathbb{R}^n$上的函数f连续可微, 证明: f是凸函数当且仅当对任意的X, $Y \in D$, 有

$$\langle \triangledown f(X) - \triangledown f(Y),\, X - Y \rangle \leq 0$$