

2025-2026 点集拓扑期末考试

考试时间：2026 年 6 月 23 日.

- 一、设 X 是拓扑空间, $A \subseteq Y \subseteq X$. 记 A 在子空间 Y 中的内部是 $\text{int}_Y A$, 证明: $A^\circ \subseteq \text{int}_Y A$.
- 二、设 X 是可分度量空间, Y 是 X 的子空间, 证明 Y 可分.
- 三、设 X 是正则空间, F 是 X 的闭子集, $x \in X \setminus F$. 证明: 存在 X 的开子集 U 与 V , 使得 $x \in U, F \subseteq V$ 以及 $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.
- 四、设 X 是紧空间, Y 是 Hausdorff 空间, $f: X \rightarrow Y$ 是连续满射. 证明: f 是商映射.
- 五、证明 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 可完备度量化, 但不是局部紧空间.
- 六、设 X 是第二可数空间, 证明: 存在 X 的无孤立点的闭子集 P 使得 $X \setminus P$ 至多可数.
- 七、设 $(X_i)_{i \in I}$ 是一族非空拓扑空间, $X = \prod_{i \in I} X_i$. 证明: X 是 Hausdorff 空间 \iff 任取 $i \in I$, X_i 是 Hausdorff 空间.
- 八、设 X 是完全正则空间, A 是 X 的紧子集, B 是 X 的闭子集, $A \cap B = \emptyset$. 证明: 存在连续函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 使得
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases}$$
- 九、设 X 是连通空间, A 是 X 的连通子集. 若 $X \setminus A = U \cup V$, 其中 U 与 V 是 X 的不交开子集. 证明: $A \cup U$ 连通.
- 十、证明: 连续满射 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是商映射.