2025-2026统计学类数理统计期中考试

整理人:5

1.(20分)$X_1, X_2 \dots X_n$为服从总体$f(x;\theta,\sigma)$的i.i.d.样本

$f(x;\theta,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}}(x-\theta)^2 e^{\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta)^2}$

(1)验证$f(x;\theta,\sigma)$为概率密度函数.

(2)求解θ, σ^2的矩估计.

(3)求θ, σ^2的MLE估计满足的等式,并设计迭代算法求解.

2.(20分)$X_1, X_2 \dots X_n$为服从均匀分布$U(0,\theta)$的i.i.d.样本,其中$\theta > 0$.

(1)求θ的MLE估计$\hat{\theta_1}$

(2)求θ的UMVUE$\hat{\theta_2}$

(3)证明:对统计量T=$\frac{n+2}{n+1}X_{(n)}$,$MSE(T) < min(MSE(\hat{\theta_1}), MSE(\hat{\theta_2}))$

3.(15分)$f(x;\theta)$为总体分布,$ln(f(x;\theta)$为可微函数,其中$\forall\theta_1, \theta_2 \in \Theta, \theta_1 \neq \theta_2, \{x : f(x;\theta_1) \neq f(x;\theta_2)\}$为正测度集合.

证明:似然方程当$n \to \infty$有解，且该解为θ的相合估计.

4.(15分)$X_1, X_2 \dots X_n$为服从Bernoublli分布$B(1,p)$的i.i.d.样本

其中$p \in (0,1), \theta = p^2$

(1)计算θ的$C.R.$下界

(2)计算θ的MLE估计$\hat{\theta}$

(3)证明:$\mathbb{E}[\hat{\theta}] \neq \theta$.并说明$\hat{\theta}$为上偏还是下偏

5.(15分)$X_1, X_2 \dots X_n$为服从单参数指数分布族$f(x;\theta) = c(\theta)e^{Q(\theta)T(x)}h(x)$的i.i.d.样本,其中$c(\theta) \geq 0, h(x) \geq 0. Q(\theta)$为关于$\theta$的严格单增函数,$\psi(T(X))$为关于$T(X)$的非降函数.

证明:$\mathbb{E}_\theta[\psi(T(X))]$为关于$\theta$的单增函数.

6.(15分)$X_1, X_2 \ldots X_n$为服从$\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$的i.i.d.样本,$Y_1, X_2 \ldots Y_n$为服从$\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$的$i.i.d.$样本,其中两总体之间独立.考虑假设检验

$$H_0 : \mu_1 = c\mu_2 \ \leftrightarrow\ H_1 : \mu_1 \neq c\mu_2$$

请给出检验统计量和显著性水平为α的拒绝域.