2024-2025年第二学期省身班抽象代数I进出考试题

注意: 本试卷共五道答题, 每题 20 分, 满分 100分.

一、 试证明非交换单群的阶至少是60.

二、　设 H, K 为群 G 的子群, 对 $x \in G$, 定义

$$HxK = \{hxk \mid h \in H, k \in K\}.$$

称 HxK 为 G 对 H, K 的双陪集. 试证明

1. 对任何 $x, y \in G$, $HxK = HyK$ 或 $HxK \cap HyK = \emptyset$.
2. 对任何 $x \in G$, 双陪集 HxK 包含 H 的右陪集的个数等于 HxK 包含 K 的左陪集的个数, 且等于 $[H : (H \cap xKx^{-1})]$.
3. 试利用上面双陪集的结论证明 Sylow 第一定理: 若有限群 G 的阶为 $p^l m$, 其中 p 为素数, $l \geq 1$, 且 $(m, p) = 1$, 则对任何 $0 \leq k \leq l$, G 中存在 p^k 阶子群.

三、 设 G 为有限交换群但不是循环群, 证明: G 的自同构群 $\operatorname{Aut} G$ 不是交换群.

四、　设 (R,δ) 为欧几里得环. 试证明可以定义 R^* 到 $\mathbb{N}$ 的映射 φ 满足下列条件:

(1)　对任何 $a \in R$, $b \in R^*$, 存在 $q, r \in R$ 使得 $a = qb + r$, 其中 $r = 0$ 或 $\varphi(r) < \varphi(b)$.

(2)　对任何 $a, b \in R^*$, $\varphi(ab) \geq \varphi(a)$.

五、　设 R为一个交换幺环. 如果对 R 中任何满足条件

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots,$$

的理想序列, 存在正整数 k 使得 $I_k = I_{k+1} = \ldots$, 则称R满足升链条件. 一个满足升链条件的交换幺环称为 Noether 环. 试证明 R 为 Noether 环当且仅当 R 中的任何理想都是有限生成的.