2025-2026 年度《微分几何》期末考试

命题人：王险峰

2026 年 6 月 22 日

1. 设 s 为曲线 C 的弧长参数。由曲线 C 有 Frenet 标架 $\{P(s); T(s), N(s), B(s)\}$，$\kappa(s), \tau(s)$ 连续。设曲线 $\widetilde{C}$ 有参数方程 $\widetilde{P}(s) = \int_{s_0}^{s} N(u)\,\mathrm{d}u$。求 $\widetilde{C}$ 的曲率 $\widetilde{\kappa}(s)$，挠率 $\widetilde{\tau}(s)$ 和 Frenet 标架 $\{\widetilde{P}(s); \widetilde{T}(s), \widetilde{N}(s), \widetilde{B}(s)\}$。

2. 设曲面 S 的参数方程为 $P(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u+v)$。

   (a) 求 S 的第一基本形式，第二基本形式和法向量。

   (b) 求 S 的 Gauss 曲率 K 和平均曲率 H。

   (c) 曲面 S 是否有脐点？若有，求出所有脐点；若没有，给出证明。

3. 设平面曲线 C 的参数方程为 $P(t) = (t, \cosh t)$，求相对曲率 κ_r。

4. 设曲面 S_1 和 S_2 的第一基本形式分别为

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{d}u^2 + e^{2u}\,\mathrm{d}v^2, \mathrm{I}_2 = \mathrm{d}u^2 + \cosh^2 u\,\mathrm{d}v^2.$$

   求曲面 S_1, S_2 的 Gauss 曲率 K_1, K_2 并证明曲面 S_1 和曲面 S_2 之间存在保长对应。（可以形式上证明保长对应的存在性，也可以具体地把保长对应求出）

5. p 为正则曲面 S 上一点，证明

$$K(p) = \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L(r)}{r^3} = \lim_{r\to 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4},$$

   其中 $K(p)$ 为 p 点的 Gauss 曲率，r 是以 p 为中心的测地圆 $S_r(p)$ 的半径，$L(r)$ 为 $S_r(p)$ 界定区域的周长，$A(r)$ 为 $S_r(p)$ 界定区域的面积。