

南开大学 2025-2026 学年度第二学期

数学省身班《概率论》期末考试

考试时间：2026 年 7 月 1 日 10:00~11:40 满分：100 分

作者：淘气的小杨桃

一、(20 分) 直接写出条件或公式：

- (1) 全概率公式；(2) 贝叶斯公式；
(3) 林德伯格 (Lindeberg) 条件；(4) 费勒 (Feller) 条件；(5) 切比雪夫不等式.

二、(20 分)

- (1) 叙述两个随机变量独立和不相关的定义；
(2) 叙述两个随机变量独立和不相关的关系，并给出证明或反例.

三、(20 分) 已知 ξ 和 η 的联合分布密度函数满足

$$p(x, y) = Ae^{-2(x+y)}, 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty.$$

- (1) 求 A 的值；(2) 求 $P(\xi < \eta)$ 的值；(3) 求 $\xi + \eta$ 的密度函数.

四、(15 分) 已知独立的随机变量 ξ, η 分别服从 λ_1, λ_2 的 Poisson 分布，求

$$P(\xi + \eta = k | \xi = i), 0 \leq i \leq k, k \in \mathbb{N}^*.$$

五、(15 分)

(1) 叙述大数定理；

- (2) 已知独立的随机变量 $\{\xi_k\}$ 满足 $P(\xi_1) = 1, P(\xi_n = 1/n) = 1/n, P(\xi_n = -1/n) = 1/n, P(\xi_n = 0) = 1 - 2/n$, 判断并证明 $\{\xi_n\}$ 是否满足大数定律.

六、(10 分) 已知独立同分布的随机变量 $\{\xi_k\}$ 的均值为 0，方差为 1，已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\frac{a_n}{A_n} \rightarrow 0,$$

其中 $A_n = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$, 求证：随机变量

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k \xi_k}{A_n}$$

依分布收敛于标准正态分布.