拓扑线性空间 2025–2026 年试卷

1. 命题人：李磊

2. 考试时间：2026 年 6 月 30

3. 回忆人：cauchy710

写在最前面：李磊真是我亲爹

1.（20 分）Let E be a topological vector space (TVS) and U be a neighborhood of 0. Show that U is absorbing.

2.（20 分）Let E be a TVS and $A \subset E$ be a bounded subset. Show that the closure $\overline{A}$ of A is also bounded.

3.（20 分）Let E be a TVS and $A \subset E$ be a convex subset. Show that the closure $\overline{A}$ is also convex.

4.（15 分）Let E be a TVS and $f : E \to \mathbb{K}$ be a non-zero linear functional on E. Show that if G is an open subset of E, then $f(G)$ is open. （注：开映射）

5.（15 分）

(a) 请给出弱算子拓扑（Weak Operator Topology, WOT）的定义。

(b) 证明：$\langle T_\alpha h, k\rangle \to \langle T_0 h, k\rangle \iff T_\alpha \xrightarrow{\text{WOT}} T_0$。

6.（10 分）Let $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of numbers. Consider the subset A in the sequence space l^3 defined by:

$$A = \left\{ (x_n) \in l^3 : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x_n|^3 \leq 1 \right\}$$

试讨论并证明集合 A 是否满足以下性质：

(a) 平衡性（balanced）；

(b) 吸收性（absorbing）。

提示

1. 前年（2025）压轴考了书上定理 E 可分情况下 B_{E*} 在弱 * 下可度量. 不过今年李磊老师说“**应该不会**”考定理
2. 李磊真是我亲爹